Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4 – Mathematik und Naturwissenschaften
AG Optimierung und Approximation

Vorkurs Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften, Gesundheitsökonomie und Drucktechnik

Prof. Dr. Kathrin Klamroth, Dr. Michael Stiglmayr

2019

Version 0.6 (24. September 2019)

Inhaltsverzeichnis

1 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Beträge

1.1 Potenzen und Wurzeln

Potenzen und Wurzeln

Definition 1.1. Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n-te Potenz* von a. Dabei heißt a *Basis* und n *Exponent*.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1\,, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist die *n-te Wurzel aus a*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte *nicht-negative Zahl*, deren n-te Potenz a ergibt.

Für $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Beispiel 1.2.

$$\begin{aligned} 2^5 =& 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \\ 3^{-2} =& \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ 16^{\frac{1}{4}} =& \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{da } 2^4 = 16 \\ 4^{\frac{3}{2}} =& \left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3} = 8 \end{aligned}$$

Beispiel 1.3. Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von p% jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.
Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{aligned} \text{einem Jahr:} \quad & K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ \text{zwei Jahren:} \quad & K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \\ & \dots \\ n \text{ Jahren:} \quad & K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \end{aligned}$$

Dies ist die *Zinseszinsformel*.

Beispiel 1.4. Frau Kramer benötigt in n Jahren einen Betrag von K_n €. Wie kann sie ausrechnen, welches Kapital sie heute anlegen muss, wenn die Bank ihr Kapital jährlich mit einer Zinsrate von $p\%$ verzinst und die Zinsen jeweils dem Kapital gutschreibt.
Aus dem ersten Beispiel sieht man:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \iff K_0 = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100})^n}$$
$$\iff K_0 = K_n \cdot (1 + \frac{p}{100})^{-n}$$

Rechenregeln für Potenzen

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r \cdot b^r = (a\,b)^r$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$
- $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$
- $a^{b^r} = a^{(b^r)}$

Beispiel 1.5.

$$4^{3^2} = 4^{\left(3^2\right)} = 4^{3 \cdot 3} = 4^9 \qquad \text{aber} \quad \left(4^3\right)^2 = (4 \cdot 4 \cdot 4)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$\left(27x^{3p}y^{6q}z^{12r}\right)^{\frac{1}{3}} = 3x^p y^{2q} z^{4r}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}} b$$

$$\frac{\left[(3a)^{-1}\right]^{-2}\left(2a^{-2}\right)^{-1}}{a^{-3}} = \frac{9}{2} \cdot a^7$$

$$\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{2}{7}} = x^{\frac{2}{21}} = \sqrt[21]{x^2}$$

1.2 Logarithmen

Logarithmen

Definition 1.6. Seien $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ (d. h. positiv und ungleich 1) und $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* derjenige Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten:

$$\log_a x = u \iff a^u = x\,.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 verwendet man statt $\log_{10} x$ auch abkürzend die Schreibweise $\lg x$, für Logarithmen zur Basis e, den *natürlichen Logarithmus*, schreibt man statt $\log_e x$ auch $\ln x$.

Beispiel 1.7.

$$\begin{aligned}
\log_2 8 &= 3, \quad \text{denn } 2^3 = 8 \\
\lg 100 &= 2, \quad \text{denn } 10^2 = 100 \\
\log_9 3 &= \frac{1}{2}, \quad \text{denn } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \\
\log_{\frac{1}{3}} 9 &= -2, \quad \text{denn } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9
\end{aligned}$$

Rechenregeln für Logarithmen
Für $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

- $$a^{\log_a x} = x$$
- $$\log_a (a^x) = x$$
- $$\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$$
- $$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
- $$\log_a x^p = p \log_a x$$
- $$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \qquad \text{bzw.} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Beispiel 1.8. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\log_2(8x^2) &= \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2\log_2 x \\
\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) &= \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5\lg x
\end{aligned}$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

Beispiel 1.9. Herr Huber bekommt von seinem Arbeitgeber eine jährliche Gehaltssteigerung von 4% zugesagt. Er überlegt, nach wie vielen Jahren er zum ersten Mal mehr als doppelt soviel verdient.

Mit G bezeichnen wir Herrn Hubers derzeitiges Gehalt und lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned}
2G &= G\left(1+\frac{4}{100}\right)^t && |:G \text{ Beachte } G>0\\
\iff 2 &= 1.04^t && |\text{Anwendung des Logarithmus}\\
\iff \lg 2 &= \lg\left(1.04^t\right) && |\text{Rechenregel Logarithmus}\\
\iff \lg 2 &= t\cdot \lg 1.04\\
\iff \frac{\lg 2}{\lg 1.04} &= t
\end{aligned}$$

Da $\frac{\lg 2}{\lg 1.04} \approx 17.67$, verdient Herr Huber nach 18 Jahren zum ersten Mal mehr als doppelt so viel.

1.3 Beträge reeller Zahlen

Beträge reeller Zahlen

Definition 1.10. Unter dem *Betrag* einer reellen Zahl a versteht man geometrisch den Abstand von a zum Ursprung (Nullpunkt) auf der reellen Zahlengeraden, d. h.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiel 1.11.

$$\begin{aligned}
|4| &= 4\\
|-5| &= 5\\
|0| &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x-2| &= \begin{cases} x-2 & \text{falls } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{falls } x-2 < 0 \end{cases}\\
\iff \quad |x-2| &= \begin{cases} x-2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2-x & \text{falls } x < 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$\begin{aligned}
&x_1 - x_2 \quad \text{falls } x_1 \geq x_2\,, \text{d. h.} \quad x_1 - x_2 \geq 0\\
&x_2 - x_1 \quad \text{falls } x_2 > x_1\,, \text{d. h.} \quad x_1 - x_2 < 0\,.
\end{aligned}$$

Somit gibt

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{falls } x_1 < x_2 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden an.

Beispiel 1.12.

- Abstand zwischen 2 und 8: $|2-8| = |-6| = 6$
- Abstand zwischen -5 und 10: $|-5-10| = |-15| = 15$
- Abstand zwischen -7 und -3: $|-7-(-3)| = |-4| = 4$

2 Grundlagen der Mengenlehre

Definition 2.1.

- Als *Menge* bezeichnet man die Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte, die *Elemente* genannt werden.
- Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit dem Symbol $\{\ \}$ (oder $\varnothing$) bezeichnet.
- Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten, man schreibt dann $A = B$.

Beispiel 2.2.

1. Menge der Teilnehmer am Vorkurs Mathematik
2. Menge der Zahlen 2,3,5,7.
3. Menge der Telefonnummern in Wuppertal

Bezeichnung 2.3. *Mengen werden in der Regel mit großen Buchstaben, die Elemente mit kleinen Buchstaben bezeichnet.*

- $x \in A$: *x ist Element von A.*
- $x \notin A$: *x ist nicht Element von A.*

2.1 Beschreibung von Mengen

Man unterscheidet die *aufzählende* und die *beschreibende* Form. Bei der aufzählenden Form werden alle Elemente in beliebiger Reihenfolge zwischen zwei geschweiften Klammern aufgelistet, z. B.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ oder auch } A = \{2, 5, 1, 4, 3\}.$$

Häufig ist es unpraktisch oder auch nicht möglich, eine Menge in der aufzählenden Form anzugeben. Bei der beschreibenden Form werden die Elemente mit Hilfe von Aussageformen unter Angabe der Grundmenge spezifiziert, z. B.

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 5\}.$$

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Definition 2.4. $A \subseteq B$ (gesprochen „A ist Teilmenge von B“), wenn jedes Element von A auch Element von B ist, d.h.

$$A \subseteq B \iff (x \in A \implies x \in B)$$

2.3 Verknüpfungen von Mengen

Definition 2.5. Als *Durchschnitt* oder *Schnitt* $A \cap B$ zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A *und* zu B gehören, d. h. $A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$.
Ist $A \cap B = \varnothing$, so heißen A und B *disjunkt*.
Die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A *oder* zu B gehören, d. h. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Die *Differenzmenge* $A \backslash B$ von A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören, d. h. $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
Das *Komplement* $\mathcal{C}(A)$ einer Menge A bezogen auf eine Grundmenge Ω besteht aus allen Elementen von Ω, die nicht zu A gehören, d. h. $\mathcal{C}(A) = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega \backslash A$

Beispiel 2.6. Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Studierenden an der Bergischen Universität Wuppertal.

W	Menge aller Studierenden der Wirtschaftswissenschaften
F	Menge aller weiblichen Studierenden
M	Menge aller männlichen Studierenden
S	Menge aller Studierenden, die im Unichor singen
B	Menge aller Studierenden, die Basketball spielen

Wir überlegen nun, wie die folgenden miteinander verknüpften Mengen beschrieben werden können.

$\Omega \backslash W$	Alle Studierenden, die nicht Wirtschaftswissenschaften studieren
$W \cup S$	Alle Studierenden, die Wirtschaftswissenschaften studieren oder im Unichor singen
$M \cap B$	Alle männlichen Studierenden, die Basketball spielen
$W \backslash (B \cap S)$	Studierende der Wirtschaftswissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen
$(W \backslash S) \cup (W \backslash B)$	Studierende der Wirtschaftswissenschaften, die nicht sowohl Basketball spielen als auch im Chor singen

2.4 Regeln für die Verknüpfung von Mengen

$A \cup B$	$=$	$B \cup A$	(Kommutativgesetz)
$A \cap B$	$=$	$B \cap A$	
$A \cup (B \cup C)$	$=$	$(A \cup B) \cup C$	(Assoziativgesetz)
$A \cap (B \cap C)$	$=$	$(A \cap B) \cap C$	
$A \cup (B \cap C)$	$=$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Distributivgesetz)
$A \cap (B \cup C)$	$=$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	
$\mathcal{C}(A \cup B)$	$=$	$\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$	(Regel von De Morgan)
$\mathcal{C}(A \cap B)$	$=$	$\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$	

Tabelle 1: Regeln für die Verknüpfung von Mengen

Definition 2.7. Seien A und B Mengen. Unter dem *Kreuzprodukt* $A \times B$ von A und B versteht man die Menge aller möglichen geordneten Paare (Tupel) (a, b), wobei die erste Komponente aus A und die zweite Komponente aus B ist, d. h.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Beispiel 2.8.

$$\{1, 2\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

Bezeichnung 2.9 (Zahlenmengen)**.**

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *Da sich jeder Bruch als endliche oder periodische Dezimalzahl darstellen lässt (z. B.* $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$*), kann man die rationalen Zahlen auch angeben als* $\mathbb{Q} = \{x \colon x$ *endliche oder periodische Dezimalzahl*$\}$.
- reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{x \colon x$ *endliche oder unendliche Dezimalzahl*$\}$ *Zu den rationalen Zahlen kommen bei den reellen Zahlen die unendlichen, nicht periodischen Dezimalzahlen dazu. Dies sind die sogenannten* irrationalen Zahlen *wie z. B.* π, $\sqrt{2}$.
- *Wenn wir festlegen wollen, dass wir von einer Zahlenmenge nur die nicht-negativen Elemente betrachten wollen, so kennzeichnen wir dies mit einem tiefgestellten* $+$ *z. B.* $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$.

2.5 Intervalle

Definition 2.10 (Intervall)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b heißt (endliches) *Intervall*, a und b heißen Randpunkte des Intervalls. Dabei wird unterschieden, ob Randpunkte zum Intervall dazugehören oder nicht. Im einzelnen verwenden wir die folgenden Bezeichnungen.

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall von } a \text{ bis } b
\end{aligned}$$

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.

Auch gewisse unbeschränkte Mengen werden als *unendliche Intervalle* bezeichnet und mit Hilfe des Symbols ∞ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Merke: *Unendlich ∞ ist keine reelle Zahl und kann deshalb nicht in einem Intervall liegen.*

3 Gleichungen

Lösen von Gleichungen
In nahezu allen Anwendungen der Mathematik müssen Gleichungen gelöst werden. Insbesondere ist es wichtig, auch mit Gleichungen umgehen zu können, in denen nicht nur die Variable x, sondern auch andere Namen und mehrere Variable vorkommen.

Bei jeder Umformung einer Gleichung muss man im Klaren darüber sein, ob es sich um eine *Äquivalenzumformung* handelt.

Zu aller erst muss man jedoch überprüfen, für welche Werte eine Gleichung überhaupt zulässig ist, d. h. es muss die *Definitonsmenge* $\mathbb{D}$ der Gleichung bestimmt werden. Wenn keine weiteren Einschränkungen vorgegeben sind, nehmen wir als Grundmenge die reellen Zahlen an.

Beispiel 3.1. Für welche Werte von p gilt die Gleichung

$$6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2)\ ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
& 6p - \frac{1}{2}(2p-3) = 3(1-p) - \frac{7}{6}(p+2) && \Big|\ \text{ausmultiplizieren}\\
\iff\quad & 6p - p + \frac{3}{2} = 3 - 3p - \frac{7}{6}p - \frac{7}{3} && \Big|\ \text{zusammenfassen}\\
\iff\quad & 5\,p + \frac{3}{2} = \frac{2}{3} - \frac{25}{6}p && \Big|\ + \frac{25}{6}p - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff\ & \frac{55}{6}\,p = -\frac{5}{6} && \Big|\ \cdot \frac{6}{55}\\
\iff\ & p = -\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{55} && \Big|\ \text{kürzen}\\
\iff\ & p = -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{11}\}$

Beispiel 3.2. Für welche Werte von x gilt die Gleichung

$$\frac{2x^2 + 5x - 9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1\ ?$$

Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$ (da Division durch Null nicht erlaubt) Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{2x^2 + 5x - 9}{x(x+3)} = \frac{2}{x+3} + 1 && \Big|\ \cdot x(x+3) \text{ mit } x \neq 0 \wedge x \neq -3\\
\iff\ & 2x^2 + 5x - 9 = 2x + x^2 + 3x \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3 && \Big|\ - x^2 - 5x + 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff\ & x^2 = 9 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3\\
\iff\ & (x = 3 \vee x = -3) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -3\\
\iff\ & x = 3
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$

Beispiel 3.3. Ein Unternehmen stellt Mathematikbücher für Wirtschaftswissenschaftler her. Die Produktion kostet pro Buch €23. Außerdem hat das Unternehmen Fixkosten von €10000. Jedes Buch wird für €68 verkauft. Wie viele Bücher müssen verkauft werden, um einen Gewinn von €57500 zu erzielen?
Wir bezeichnen mit B die Anzahl produzierter und verkaufter Bücher. Dann betragen die Gesamtkosten in €: $23\,B + 10000$, die Einnahmen in €: $68\,B$. Es soll also $68\,B - (23\,B + 10000) = 57500$ gelten.

Grundmenge: $\mathbb{N}$ Definitionsmenge der Gleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{N}$
Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} & 68B - (23\,B + 10000) = 57500 && \Big|\; + 10000 \\ \Longleftrightarrow\; & 45\,B = 67500 && \Big|\; : 45 \\ \Longleftrightarrow\; & B = 1500 \end{aligned}$$

Der gewünschte Gewinn wird also erreicht, wenn 1500 Bücher produziert und verkauft werden.

3.1 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen
Gesucht sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \text{ mit } a \neq 0\,.$$

Mit den Abkürzungen $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

der quadratischen Gleichung in Normalform. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} & x^2 + p\,x + q = 0 && \Big|\text{quadratische Ergänzung} \\ \Longleftrightarrow\; & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 && \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Longleftrightarrow\; & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

Definition 3.4 (Diskriminante)**.** Der Term

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$.
Am Vorzeichen der Diskriminante kann man die Lösbarkeit der quadratischen Gleichung ablesen:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \;&\Rightarrow\; \text{keine Lösung} \\ \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \;&\Rightarrow\; \text{eine (doppelte) Lösung} \\ \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \;&\Rightarrow\; \text{zwei verschiedene Lösungen} \end{aligned}$$

Beispiel 3.5. Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - 3\,x + 2 = 0$.
Für die Diskriminante gilt $(\frac{3}{2})^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
\Longleftrightarrow\ & x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & x = 2 \ \vee\ x = 1 \\
\Longrightarrow\ & \mathbb{L} = \{1, 2\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.6. Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung: $x^2 - x + 2 = 0$.
Für die Diskriminante gilt $(\frac{1}{2})^2 - 2 = -\frac{7}{4} < 0$; es gibt also keine reelle Lösung.
Somit: $\mathbb{L} = \{\ \}$

Faktorisierung
Hat man, falls vorhanden, die reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt, so kann man den quadratischen Term faktorisieren, d. h. den Term in Linearfaktoren zerlegen. Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$, so gilt:

$$x^2 + p\,x + q = (x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Beispiel 3.7. Bestimmen Sie, falls möglich, die Zerlegung von $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ in Linearfaktoren.
Wir berechnen dazu die Lösungen der Gleichung $2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ Für die Diskriminante gilt $(\frac{1}{12})^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} > 0$; es gibt also zwei verschiedene reelle Lösungen.

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \ & \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{3}} \\
& \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \\
& \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3} \\
& \Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Der quadratische Term lässt sich also in Linearfaktoren zerlegen:

$$2x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Spezialfälle quadratischer Gleichungen
Ist in einer quadratischen Gleichung $c = 0$, so lässt sich $ax^2 + bx = 0$ einfacher durch Ausklammern lösen.

Merke: *Die Gleichung darf nicht durch x dividiert werden. Die Lösung $x = 0$ würde sonst „verloren gehen“.*

Beispiel 3.8. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 + 3x = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x = 0 &\iff x(2x+3) = 0 \\ &\iff x = 0 \ \lor \ 2x + 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \ \lor \ x = -\frac{3}{2} \\ &\implies \mathbb{L} = \left\{0, -\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Spezialfälle quadratischer Gleichungen
Einige quadratische Gleichungen lassen sich auch einfach durch Anwendung einer *binomischen Formel* lösen.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Beispiel 3.9. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 = 0 &\iff (2x-3)^2 = 0 \\ &\iff 2x - 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \\ &\implies \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

3.2 Gleichungen der Form $x^n = a$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Beispiel 3.10.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^4 = 16 \quad &\iff x = \pm\sqrt[4]{16} \\ &\iff x = -2 \lor x = 2 \\ &\implies \mathbb{L} = \{-2, 2\} \end{aligned}$$

b) $x^6 = -64$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, da bei einem geraden Exponenten die Potenz nicht negativ werden kann.

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \{\quad\}$$

c)
$$\begin{aligned} x^3 = -64 &\Longleftrightarrow x = -\sqrt[3]{64} \\ &\Longleftrightarrow x = -4 \\ &\Longrightarrow \mathbb{L} = \{-4\} \end{aligned}$$

Gleichungen der Form $x^n = a$

Allgemein gilt für die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

n gerade und $a > 0$:	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$
n gerade und $a = 0$:	$\mathbb{L} = \{0\}$
n gerade und $a < 0$:	$\mathbb{L} = \{\quad\}$
n ungerade und $a > 0$:	$\mathbb{L} = \{\sqrt[n]{a}\}$
n ungerade und $a = 0$:	$\mathbb{L} = \{0\}$
n ungerade und $a < 0$:	$\mathbb{L} = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

3.3 Gleichungen mit Beträgen

Gleichungen mit Beträgen

Beim Lösen von Gleichungen mit Beträgen ist es wichtig, genau auf die nötigen Fallunterscheidungen zu achten.

Für jeden einzelnen Betrag muss dazu überlegt werden, für welche Werte der Variablen das Argument des Betrags positiv oder negativ ist.

Beispiel 3.11. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3\,x - 2| = 5\,.$$

$$|3\,x - 2| = \begin{cases} 3\,x - 2 & \text{falls } x \geq \frac{2}{3} \\ 2 - 3\,x & \text{falls } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Fall: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} & |3x - 2| = 5 \\ \Longleftrightarrow\ & 3\,x - 2 = 5 \\ \Longleftrightarrow\ & 3\,x = 7 \\ \Longleftrightarrow\ & x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L}_1 = \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

2. Fall: $x < \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
&|3\,x - 2| = 5\\
\Longleftrightarrow\ &2 - 3\,x = 5\\
\Longleftrightarrow\ &-3\,x = 3\\
\Longleftrightarrow\ &x = -1\\
\Longrightarrow\ &\mathbb{L}_2 = \{-1\}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge von $|3x-2| = 5$ ist die Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}.$$

Beispiel 3.12. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$|3\,x - 2| = |x - 5|\,.$$

$$\begin{aligned}
|3\,x - 2| &= \begin{cases} 3\,x - 2 & \text{falls } x \geq \frac{2}{3}\\ 2 - 3\,x & \text{falls } x < \frac{2}{3}\end{cases}\\
|x - 5| &= \begin{cases} x - 5 & \text{falls } x \geq 5\\ 5 - x & \text{falls } x < 5\end{cases}
\end{aligned}$$

Damit müssen drei Fälle betrachtet werden: $x < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leq x < 5$ und $x \geq 5$.

1. Fall: $x \geq 5$.

$$\begin{aligned}
&|3x - 2| = |x - 5|\\
\Longleftrightarrow\ &3\,x - 2 = x - 5\\
\Longleftrightarrow\ &2\,x = -3\\
\Longleftrightarrow\ &x = -\frac{3}{2} \qquad \overset{-\frac{3}{2} \not\geq 5}{\Longrightarrow} \mathbb{L}_1 = \{\quad\}
\end{aligned}$$

2. Fall: $\frac{2}{3} \leq x < 5$.

$$\begin{aligned}
&|3x - 2| = |x - 5|\\
\Longleftrightarrow\ &3\,x - 2 = 5 - x\\
\Longleftrightarrow\ &4\,x = 7\\
\Longleftrightarrow\ &x = \frac{7}{4} \qquad \Longrightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \left\{\frac{7}{4}\right\}
\end{aligned}$$

3. Fall: $x < \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& |3x-2| = |x-5| \\
\iff & 2-3x = 5-x \\
\iff & -3 = 2x \\
\iff & x = -\frac{3}{2} \qquad\qquad \implies \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\implies \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right\}.$$

Bemerkung 3.13. Zur Lösung von Gleichungen mit Beträgen muss jeder Betrag mittels Fallunterscheidung aufgelöst werden. Damit erhält man für jeden dieser Fälle eine Gleichung, die auf einem Intervall gültig ist.
Eine Lösung einer solchen „Teilintervall-Gleichung“ ist jedoch nur dann Lösung der Betragsgleichung, wenn sie innerhalb des zugehörigen Intervalls liegt.

3.4 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen
Die Lösung einer einfachen Exponentialgleichung

$$a^x = b \qquad \text{mit } a, b > 0,\ a \neq 1$$

erhält man durch Anwenden des Logarithmus zur Basis a als

$$x = \log_a b\,,$$

da $\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x$.

Beispiel 3.14.

$$15^x = \frac{1}{225}$$

$$\begin{aligned}
\iff & x = \log_{15} \frac{1}{225} \\
\iff & x = \log_{15} 15^{-2} \\
\iff & x = -2 \\
\implies & \mathbb{L} = \{-2\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.15.

$$\begin{aligned}
& 2^x = 3 \\
\iff & x = \log_2 3
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L} = \{\log_2 3\}$$

Will man mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für die Lösung berechnen, so kann es notwendig sein $\log_2 3$ in einen Quotienten aus Logarithmen zur Basis 10 oder e umzuwandeln, d. h.

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58\,.$$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

Einfache lineare Gleichungssysteme
Im Rahmen des Vorkurses behandeln wir hier den Fall eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.

Beispiel 3.16. In dem folgenden (einfachen) Modell bezeichne Y das Bruttoinlandsprodukt (BIP), C den Konsum und I_0 die fest vorgegebene Gesamtinvestition jeweils in Geldeinheiten. Das Modell besteht nun in der Annahme, dass das BIP die Summe aus Konsum und Gesamtinvestition ist, und dass der Konsum eine lineare Funktion des BIP ist,

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

mit festen Parametern $a > 0$ und $0 < b < 1$. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Gleichungssystem lösbar ist und was gegebenenfalls die Lösung ist.

Will man das Problem für verschiedene Parameterwerte behandeln, ist es ziemlich unpraktisch, für alle diese Parameterwerte das Gleichungssystem neu zu lösen. Sinnvoller ist es, im Falle der Lösbarkeit, die Lösungen für Y und C in Abhängigkeit von den Parametern zu bestimmen. Versuchen Sie selbst zu verifizieren, dass

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}\, I_0\,,\ C = \frac{b}{1-b}\, I_0 + \frac{a}{1-b}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

löst.

Lösen linearer Gleichungssysteme
mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten
Sei also

$$\begin{aligned} &(1) \quad a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ &(2) \quad a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{aligned}$$

Geometrisch sind dies die Gleichungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Wir suchen nun Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d. h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.
Dafür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung. (geometrisch: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.)

2. Es gibt unendlich viele Lösungen. (geometrisch: Die Geraden sind gleich.)

3. Es gibt keine Lösung. (geometrisch: Die Geraden sind parallel aber nicht gleich.)

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Koeffizienten ungleich Null sind.

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot a_{22} & a_{22}a_{11}\,x_1 + a_{22}a_{12}\,x_2 &=& a_{22}b_1 \\
(2)\cdot(-a_{12}) & -a_{12}\,a_{21}\,x_1 - a_{12}\,a_{22}\,x_2 &=& -a_{12}b_2 \\
\hline
(I) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 &=& a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcl}
(1)\cdot(-a_{21}) & -a_{21}\,a_{11}\,x_1 - a_{21}\,a_{12}\,x_2 &=& -a_{21}b_1 \\
(2)\cdot a_{11} & a_{11}a_{21}\,x_1 + a_{11}a_{22}\,x_2 &=& a_{11}b_2 \\
\hline
(II) & (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_2 &=& a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1
\end{array}$$

1. (I) und (II) sind Bestimmungsgleichungen für x_1 und x_2. Man kann nachrechnen, dass (I) und (II) auch gültig sind, wenn Koeffizienten Null sind.

2. Der Wert $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt Lösungsmöglichkeit des Gleichungssystems. Man bezeichnet ihn daher als Determinante.
   a) Ist $D \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutige Lösung
   $$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$
   b) Ist $D = 0$ und $a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0$ und $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   c) Ist $D = 0$ und $(a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \neq 0$ oder $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Bezeichnung 3.17.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

heißt Determinante *zweiter Ordnung.*
Ebenso:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

D_{x_1} und D_{x_2} erhält man aus D, indem man die 1. bzw. 2. Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems (1) und (2) ersetzt.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} &(I)\ D \cdot x_1 = D_{x_1} \\ &(II)\ D \cdot x_2 = D_{x_2} \end{aligned}$$

und

1. $D \neq 0$. Dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also
$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\},$$
2. $D = 0$ *und* $D_{x_1} = 0$ *und* $D_{x_2} = 0$. Dann wird aus (I) und $(II)\, 0 = 0$, also
$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}.$$
3. $D = 0$ *und* ($D_{x_1} \neq 0$ *oder* $D_{x_2} \neq 0$). Dann ist (I) oder (II) nicht erfüllbar, also:
$$\mathbb{L} = \{\ \},$$

Beispiel 3.18.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 3 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Dazu berechnen wir die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Da $D \neq 0$ ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = 3\,, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = 1\,.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \{(3, 1)\}$.

4 Ungleichungen

4.1 Lineare Ungleichungen

Beispiel 4.1. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $3x - 2 \geq 4 - x$ erfüllt ist.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} && 3x - 2 &\geq 4 - x \\ \Longleftrightarrow && 4x &\geq 6 \\ \Longleftrightarrow && x &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Beispiel 4.2. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $-\frac{1}{2}x + 5 > -3$ erfüllt ist.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} && -\frac{1}{2}x + 5 &> -3 \\ \Longleftrightarrow && -\frac{1}{2}x &> -8 \\ \Longleftrightarrow && x &< 16 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} = \left(-\infty, 16\right)$.

4.2 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen
Lösung durch Vorzeichendiagramme

Vorzeichendiagramme
Für Ungleichungen, deren linke Seite in Faktoren zerlegt ist und deren rechte Seite 0 ist, lassen sich die Lösungsmengen gut mit Hilfe von Vorzeichendiagrammen bestimmen.

1. Bestimme für jeden Faktor die Intervalle mit positivem bzw. negativem Vorzeichen.
2. Die Vorzeichen werden für die einzelnen Faktoren in ein Diagramm eingetragen.
3. Berechne die Vorzeichenverteilung des Gesamtproduktes.

Beispiel 4.3. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $(x - 2)(x + 5) < 0$ gilt.

Vorzeichendiagramm

	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x + 5)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = (-5, 2)$.

Beispiel 4.4. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ gilt.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Hier müssen wir zunächst $x^2 - 2x - 3$ faktorisieren.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 &\iff x = 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\iff x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Also ist $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, d. h.

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \iff (x+1)(x-3) \leq 0$$

Vorzeichendiagramm

	-2		-1		0		1		2		3		4
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [-1, 3]$

Beispiel 4.5. Gesucht sind alle $p \in \mathbb{R}$, für die $\frac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p$ gilt.
Definitionsmenge der Ungleichung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ Wir formen die Ungleichung zunächst äquivalent um.

$$\begin{aligned} \frac{2p-3}{p-1} \geq 3 - p &\iff \frac{2p-3}{p-1} + p - 3 \geq 0 \\ &\iff \frac{2p - 3 + (p-3)(p-1)}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p^2 - 2p}{p-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{p(p-2)}{p-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Vorzeichendiagramm

	$p < 0$	$p = 0$	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < 2$	$p = 2$	$p < 2$
p	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$p-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$p-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{p(p-2)}{p-1}$	$-$	0	$+$	!	$-$	0	$+$

Das Symbol ! im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört.
Für die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich somit $\mathbb{L} = [0, 1) \cup [2, \infty)$.

4.3 Ungleichungen mit Beträgen

Ungleichungen mit Beträgen
Mehr noch als den Gleichungen mit Beträgen muss man beim Lösen von Ungleichungen mit Beträgen darauf achten saubere Fallunterscheidungen zu verwenden.

Beispiel 4.6. Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x-10| \leq \frac{1}{2}x\,.$$

Da

$$|x-10| = \begin{cases} x-10 & \text{falls } x \geq 10 \\ 10-x & \text{falls } x < 10 \end{cases}$$

müssen zwei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geq 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-10| \leq \frac{1}{2}x &\iff x-10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff \frac{1}{2}x \leq 10 \\ &\iff x \leq 20 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [10, 20]$ *2. Fall:* $x < 10$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-10| \leq \frac{1}{2}x &\iff -x+10 \leq \frac{1}{2}x \\ &\iff 10 \leq \frac{3}{2}x \\ &\iff \frac{20}{3} \leq x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = [\frac{20}{3}, 10)$
Die Lösungsmenge von $|x-10| \leq \frac{1}{2}x$ ist die Vereinigungsmenge von $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[\frac{20}{3}, 20\right].$$

Beispiel 4.7. Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x+3| \leq |2x-1| + 3\,.$$

$$\text{Da} \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{falls } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{falls } x < -3 \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{falls } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

müssen drei Fälle betrachtet werden.

1. Fall: $x \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1|+3 &\iff x+3 \leq 2x-1+3 \\ &\iff 1 \leq x \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_1 = [1, \infty)$

2. Fall: $-3 \leq x < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1|+3 &\iff x+3 \leq -2x+1+3 \\ &\iff 3x \leq 1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_2 = \left[-3, \frac{1}{3}\right]$
3. Fall: $x < -3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x+3| \leq |2x-1|+3 &\iff -x-3 \leq -2x+1+3 \\ &\iff x \leq 7 \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L}_3 = (-\infty, -3)$
Die Lösungsmenge von $|x+3| \leq |2x-1|+3$ ergibt sich wieder als Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen, d. h.

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \infty\right).$$

4.4 Rechenregeln

Rechenregeln für Ungleichungen

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a > 0 \wedge b > 0 &\implies a+b > 0 \\ a > b &\iff a+c > b+c \\ a > b \wedge c > d &\implies a+c > b+d \\ a > 0 \wedge b > 0 &\implies ab > 0 \\ a > 0 \wedge b < 0 &\implies ab < 0 \\ a > b \wedge c > 0 &\implies ac > bc \\ a > b \wedge c < 0 &\implies ac < bc \\ a > b \wedge c > d &\implies ac > bd \end{aligned}$$

Rechenregeln für Ungleichungen 2

Für $a, b, \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
ab > 0 &\iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \\
ab < 0 &\iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0) \\
a > b \wedge b > c &\implies a > c \\
a < b &\iff a^n < b^n \\
a < b &\iff a^{-n} > b^{-n}
\end{aligned}$$

Sinngemäß gelten entsprechende Regeln, wenn man die $<$ und $>$-Zeichen durch $\leq$ und $\geq$-Zeichen ersetzt.

5 Reelle Funktionen in einer Variablen

Reelle Funktionen in einer Variablen

Definition 5.1. Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element aus einer Menge $\mathbb{D}_f$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$ zuordnet. $\mathbb{D}_f$ *heißt Definitionsbereich* von f, die Menge aller möglichen Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ *heißt Wertebereich* von f.

Bezeichnung 5.2. *Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y = f(x)$.*
x heißt dann unabhängige Variable *oder Argument von f, y heißt* abhängige Variable.

Funktionsdefinition
Funktionen können auf unterschiedliche Weise gegeben sein, z. B. durch Angabe einer Formel (des Funktionsterms), einer Wertetabelle oder Grafik.
Ist eine Funktion durch eine Formel gegeben, so besteht der Definitionsbereich aus allen Werten, für die die Formel einen eindeutigen Wert ergibt, es sei denn, ein anderer (kleinerer) Definitionsbereich ist explizit angegeben.

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_f \\
f &: x \longmapsto f(x)\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 5.3. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen wir feststellen, für welche Werte von x der Nenner Null wird.
Es gilt $x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$. Also ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

Beispiel 5.4. Es sei

$$g(x) = \sqrt{3 - x}$$

Da die Wurzel nur für nicht-negative Zahlen definiert ist, gilt $\mathbb{D}_g = (-\infty, 3]$.

Eindeutigkeit
Wichtig an der Definition einer Funktion ist die *Eindeutigkeit der Zuordnung*. Nicht jede Gleichung mit zwei Variablen ist eine Funktion.
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ beschreibt einen Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 5. Die Kreisgleichung ist keine Funktionsgleichung, da zu jedem $x \in (-5, 5)$ zwei Werte $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ gehören, die Zuordnung ist also nicht eindeutig.
Grafisch bedeutet die Eindeutigkeit der Zuordnung, dass jede Parallele zur y-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneiden darf.

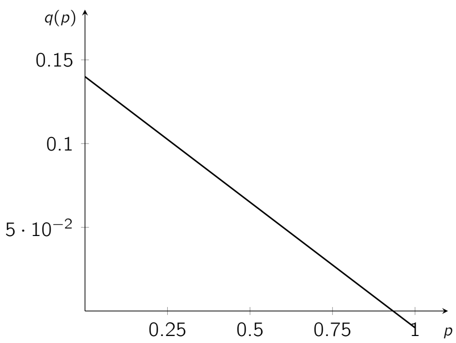
5.1 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen
Häufig werden in den Wirtschaftswissenschaften als einfache Modelle lineare Modelle verwendet. Eine Funktion

$$\begin{aligned} f &: x \longmapsto y \\ f(x) &= a\,x + b \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten a und b, heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b.

Beispiel 5.5. Die geschätzte jährliche Nachfrage q für Reis in Indien im Zeitraum 1949–1964 war $q(p) = -0.15\,p + 0.14$, wobei p den Reispreis bezeichnet. Insbesondere nimmt die Nachfrage bei steigendem Preis ab.



An diesem Beispiel kann man auch sehen, dass

Modelle (häufig) nur in bestimmten Bereichen sinnvoll anwendbar sind. Da negativer Konsum nicht möglich ist, ist das Modell sicher nicht brauchbar für $-0.15\,p + 0.14 < 0$, d. h. $p > \frac{0.14}{0.15} = \frac{14}{15}$.

Beispiel 5.6. Ein einfaches Modell einer Kostenfunktion ist die Darstellung der Gesamtkosten als Summe der Fixkosten und der als proportional zur produzierten Menge x angenommenen variablen Kosten, z. B. $C(x) = 0.5\,x + 5$.

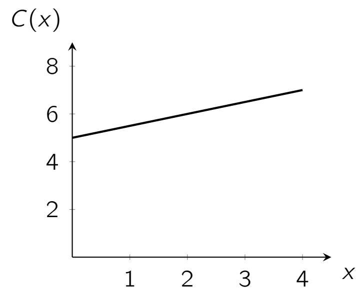


Abbildung 1: Lineare Kostenfunktion

Steigt die Produktion um eine Einheit, so steigen die Kosten um 0.5 Einheiten.

Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden
Die Gleichung einer Geraden mit der Steigung a durch den Punkt (x_1, y_1) ist gegeben durch

$$y = a\,x + \underbrace{(y_1 - a\,x_1)}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Zwei-Punkte-Formel einer Geraden
Die Gleichung einer Geraden durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$ ist gegeben durch

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Steigung}} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$$

Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen. Die zugehörigen Geradengleichungen lassen sich aber in der Form $x = c$ mit einer Konstanten c angeben.

5.2 Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen
In vielen Modellen werden Funktionen verwendet, die zunächst auf einen Minimalwert fallen und dann ansteigen oder erst auf einen Maximalwert ansteigen und dann fallen.

Einfache Funktionen mit diesen Eigenschaften sind quadratische Funktionen

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \text{ mit Konstanten } a, b, c, \text{ und } a \neq 0\,.$$

Der Graph der Funktion ist eine *Parabel*. Sie ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ und nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist.
Zur Bestimmung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) ist die Gleichung

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

zu lösen (vgl. Kapitel 5). Eine quadratische Funktion besitzt am sogenannten Scheitelpunkt ein Minimum falls $a > 0$ und ein Maximum falls $a < 0$.

Beispiel 5.7 (Bestimmung des Minimums)**.** Es sei $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Somit besitzt die Funktion ein Minimum. Wir bringen die Funktionsgleichung mittels quadratischer Ergänzung in eine andere Form.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x^2 - 4\,x + 5 \\ &= 2(x^2 - 2\,x + 1) - 2 + 5 \\ &= 2 \cdot (x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

An dieser Darstellung (Scheitelpunktform) lässt sich nun ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 1$ ein Minimum besitzt mit $f(1) = 3$. Der Scheitelpunkt ist $S(1, 3)$.

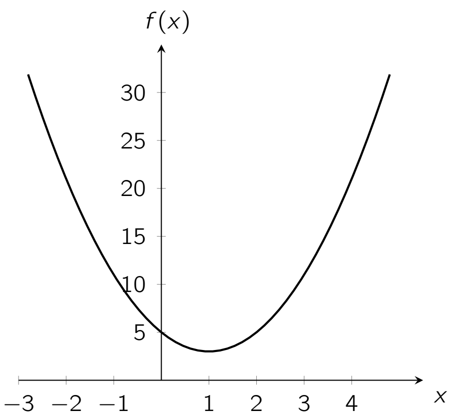


Abbildung 2: Quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, Minimum bei $(1, 3)$

Bestimmung der Scheitelpunktform

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Da $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und a, c und $\frac{b^2}{4a}$ konstant sind, gilt:

- Für $a > 0$ hat $f(x)$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Minimum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.
- Für $a < 0$ hat $f(x)$ an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ ein Maximum $f(-\frac{b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}$.

Der Scheitelpunkt ist $S(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

Beispiel 5.8. Wir bestimmen das Maximum von $f(x) = -2\,x^2 + 8x + 20$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2(x^2 - 4\,x + 4) + 8 + 20 \\
&= -2\,(x-2)^2 + 28
\end{aligned}
$$

$f(x)$ besitzt also an der Stelle $x = 2$ ein Maximum $f(2) = 28$.

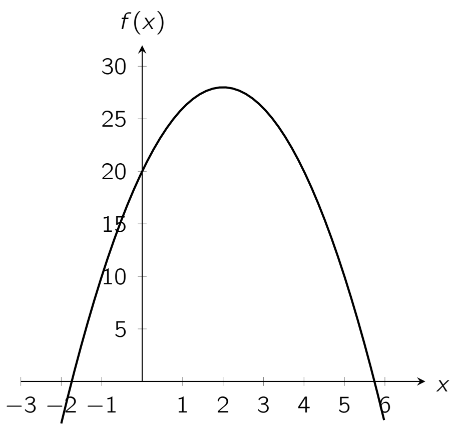


Abbildung 3: Quadratische Funktion $f(x) = -2\,x^2 + 8\,x + 20$, Maximum bei $(2, 28)$

Beispiel 5.9. Ein Unternehmen hat für die Herstellung und den Verkauf von Q Einheiten seines Produktes Gesamtkosten von

$$C = 2\,Q + \frac{1}{2}\,Q^2\,.$$

Der Preis pro Einheit ist beim Verkauf von Q Einheiten

$$P = 102 - 2\,Q\,.$$

Der Gesamterlös ist somit$R = PQ = (102 - 2\,Q)Q$ und der Gesamtgewinn (in Abhängigkeit von Q)

$$G(Q) = R - C = (102 - 2\,Q)Q - (2Q + \frac{1}{2}\,Q^2)\,.$$

Wir bestimmen den Wert von Q, der den Gewinn maximiert und berechnen den maximalen Gewinn. Umformen in die Scheitelpunktform liefert

$$G(Q) = -\frac{5}{2}(Q-20)^2 + 1000\,.$$

Der Gewinn wird also maximal für $Q = 20$ mit einem Gewinn von $G(20) = 1000$.

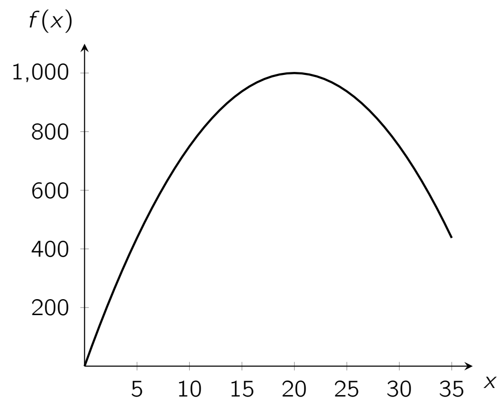


Abbildung 4: Gesamtgewinn $G(Q) = R - C = (102 - 2\,Q)Q - (2\,Q + \frac{1}{2}Q^2)$, Maximum bei $(20, 1000)$

Normalparabel

Die einfachste quadratische Funktion ordnet jeder reellen Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zu, d. h.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\,, \quad f : x \longmapsto x^2\,.$$

Der Graph ist die nach oben geöffnete Normalparabel, $S(0,0)$ der Scheitelpunkt. Die Normalparabel ist symmetrisch zur y-Achse, d. h. x und $-x$ besitzen denselben Funktionswert.

Streckung bzw. Stauchung der Normalparabel

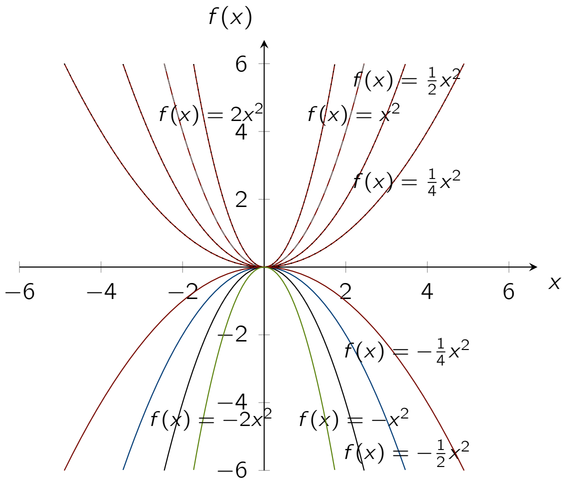
Wir betrachten nun etwas allgemeinere quadratische Funktionen der Form

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{W}_g\,, \quad g : x \longmapsto a\,x^2$$

mit einem Faktor $a \neq 0$. Dabei ist der Wertebereich

$$\mathbb{W}_g = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{falls } a > 0 \\ \mathbb{R}_- & \text{falls } a < 0 \end{cases},$$

und der Scheitelpunkt ist unverändert $S(0,0)$. Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger, für $|a| < 1$ weiter als die Normalparabel. Ist $a < 0$, so ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

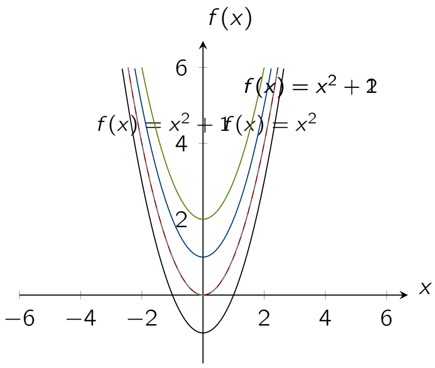


Verschieben der Normalparabel

Verschiebt man die Normalparabel um y_0 in y-Richtung, dann lautet der Funktionsterm der verschobenen Parabel

$$g(x) = x^2 + y_0$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [y_0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(0, y_0)$. Für $y_0 > 0$ wir die Parabel nach oben, für $y_0 < 0$ nach unten verschoben.

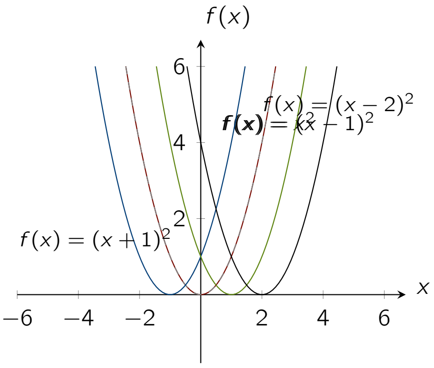


Verschieben der Normalparabel in x-Richtung

Verschiebt man die Normalparabel um x_0 in x-Richtung, dann ergibt sich der Funktionsterm der verschobenen Parabel durch Ersetzen von x durch $x - x_0$, d. h.

$$g(x) = (x - x_0)^2$$

mit Wertebereich $\mathbb{W}_g = [0, \infty)$ und Scheitelpunkt $S(x_0, 0)$. Für $x_0 > 0$ wir die Parabel nach rechts, für $x_0 < 0$ nach links verschoben.



Eine Kombination von Stauchung bzw. Streckung, Verschiebung um y_0 in y-Richtung und Verschiebung um x_0 in x-Richtung liefert allgemein

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \qquad \textit{(Scheitelpunktform).}$$

Durch Ausmultiplizieren und Umbenennen der Parameter erhält man

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \textit{(allgemeine Parabelform).}$$

Hat die Parabel an den Stellen x_1 und x_2 Schnittpunkte mit der x-Achse, so lässt sich der zugehörige Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \textit{(Nullstellenform)}$$

angeben.

Bemerkung 5.10. Man kann auch den Graphen jeder beliebigen anderen Funktion strecken bzw. stauchen, an der x-Achse spiegeln und verschieben.

- Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $|a|$, Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$ entspricht der Multiplikation des Funktionsterms mit dem Faktor a.
- Verschiebung um y_0 in y-Richtung entspricht der Addition der Konstanten y_0 zum Funktionsterm.
- Verschiebung um x_0 in x-Richtung entspricht dem Ersetzen von x durch $x - x_0$ im Funktionsterm.

5.3 Polynome

Polynome
Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Funktionen, den Polynomen.

Definition 5.11. Eine Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

mit Konstanten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* vom Grad n. Die Konstanten a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 heißen Koeffizienten, a_n Leitkoeffizient oder führender Koeffizient. Weiter definiert man $P(x) = 0$ als das Nullpolynom.

Beispiel 5.12.

- $P(x) = -\frac{1}{2}\, x^3 + 2\, x - 1$ ist ein Polynom vom Grad 3 mit den Koeffizienten $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -0.5$.
- $P(x) = \frac{x^7+x^3+x}{125}$ ist ein Polynom vom Grad 7 mit den Koeffizienten $a_0 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ und $a_1 = a_3 = a_7 = \frac{1}{125}$.
- $f(x) = 5\, x^{-3} + x^{-2} + 2$ ist *kein* Polynom.

Nullstellen von Polynomen
In vielen Problemstellungen ist es wichtig, etwas über die Anzahl und die Lage der Nullstellen, d. h. die Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ zu wissen.
Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen.
Hat man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden, so lässt sich $P(x)$ auch schreiben als

$$P(x) = (x - x_1)\, P_{n-1}(x)$$

mit dem *Linearfaktor* $(x - x_1)$ und einem Polynom $P_{n-1}(x)$, das einen Grad niedriger ist als $P(x)$.

Beispiel 5.13. Kostenfunktionen werden häufig durch kubische Polynome dargestellt, d. h.

$$C(Q) = a\, Q^3 + b\, Q^2 + c\, Q + d\,, \text{ mit } a > 0, b < 0, c > 0, d > 0\,.$$

$C(Q)$ stellt die anfallenden Kosten für die Herstellung von Q Einheiten eines Produktes dar.

- Das Absolutglied d stellt die Fixkosten dar.
- Wenn die Produktion steigt, steigen die Kosten zunächst schnell.
- Dann wird die Steigerungsrate der Kosten geringer, da die Produktionseinrichtungen besser ausgenutzt werden können.
- Wird noch mehr produziert, steigen die Kosten wieder schneller, da z. B. Überstundenzuschläge bezahlt und neue Anlagen gebaut werden müssen etc.

Für die ausführliche Untersuchung von Polynomen höheren als zweiten Grades ist man insbesondere an den folgenden Fragen interessiert:

- Wie kann man (falls vorhanden) Lösungen der Gleichung $P(x) = 0$ für ein Polynom n-ten Grades berechnen?

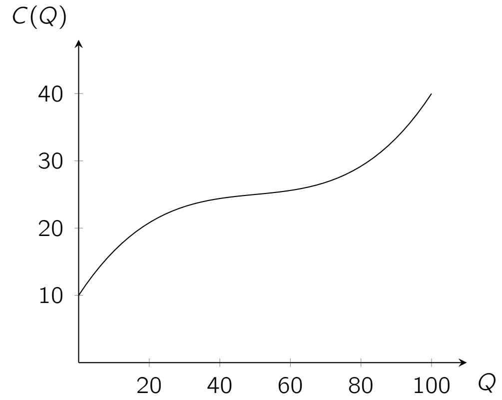


Abbildung 5: $C(Q) = \frac{1}{10000}\,Q^3 - \frac{3}{200}\,Q^2 + \frac{4}{5}\,Q + 10$

- Wie kann man, wenn man eine Nullstelle x_1 von $P(x)$ gefunden hat, das Polynom $P_{n-1}(x)$ bestimmen, so dass $P(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$ gilt?

Ist $P(x)$ ein Polynom vom Grad 1 oder 2, so haben wir die Fragen bereits beantwortet. Für die Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades gibt es zwar noch eine geschlossene Formel. Die ist aber ziemlich kompliziert. Für die Nullstellen von Polynomen höheren als dritten Grades gibt es keine geschlossene Formel mehr.

Beispiel 5.14 (Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten)**.** Sei $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ (Polynom dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle x_1 besitzt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 4\,x_1^2 + x_1 + 6 = 0 \Longleftrightarrow \quad & x_1^3 - 4\,x_1^2 + x_1 = -6 \\ \Longleftrightarrow & x_1(x_1^2 - 4\,x_1 + 1) = -6 \end{aligned}$$

Wenn x_1 ganzzahlig ist, dann ist auch $x_1^2 - 4\,x_1 + 1$ ganzzahlig, also muss x_1 (positiver oder negativer) Teiler von -6 sein.
Die Teiler von -6 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.

$P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, also ist $x_1 = -1$ Nullstelle von $P(x)$.
$\Longrightarrow$ $P(x) = (x + 1)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$\begin{array}{l} (x^3 - \ 4x^2 \ + \ x \ + 6\,) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^3 + \ \ x^2 \qquad\qquad\quad} \\ \qquad -5x^2 + \ x \ + 6 \\ \qquad \underline{-5x^2 - 5x \qquad} \\ \qquad\qquad\quad 6x + 6 \\ \qquad\qquad\quad \underline{6x + 6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

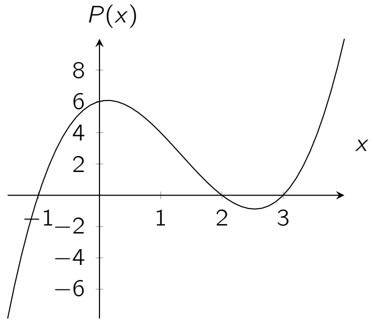


Abbildung 6: $P(x) = x^3 - 4\,x^2 + x + 6$

Also gilt $P(x) = (x+1)(x^2-5x+6)$. Mit Hilfe der pq-Formel findet man die Nullstellen der quadratischen Funktion $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$, die restlichen Nullstellen von $P(x)$.

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-3).$$

Da ein Polynomterm sein Vorzeichen nur an Nullstellen ändert, kann man aus dieser Darstellung z. B. mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positiv bzw. negativ Werte annimmt.

Satz 5.15. *Sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann gilt: Wenn $P(x)$ eine ganzzahlige Nullstelle besitzt, so ist diese Teiler des Absolutgliedes a_0.*

Beispiel 5.16. Sei $P(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12$ (Polynom fünften Grades mit ganzzahligen Koeffizienten).
Die Teiler des Absolutgliedes 12 sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt.
$P(1) = 12$, $P(-1) = 24$, $P(2) = 0$ also ist $x_1 = 2$ Nullstelle von $P(x)$.

Also ist $P(x) = (x-2)P_4(x)$, wobei $P_4(x)$ ein Polynom vom Grad 4 ist.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & -\ 3x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12\,) & : (x-2) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 \\
x^5 & -\ 2x^4 & & & & & \\
\hline
 & -x^4 & -\ 3x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12 & \\
 & -x^4 & +\ 2x^3 & & & & \\
\cline{2-6}
 & & -5x^3 & +\ 9x^2 & -\ 4x & +\ 12 & \\
 & & -5x^3 & +\ 10x^2 & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -x^2 & -\ 4x & +\ 12 & \\
 & & & -x^2 & +\ 2x & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -6x & +\ 12 & \\
 & & & & -6x & +\ 12 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Also ist

$$P(x) = (x-2)\underbrace{(x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6)}_{P_4(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -6 von $P_4(x)$ sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.

$$\begin{aligned} P_4(2) &= -20 \\ P_4(-2) &= 0 \qquad \text{also ist } x_2 = -2 \text{ Nullstelle von } P_4(x). \end{aligned}$$

Also ist $P_4(x) = (x+2)P_3(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist,

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 - & x^3 & -5x^2 - & x & -6\,) & : (x+2) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
x^4 + & 2x^3 & & & & \\ \hline
& -3x^3 & -5x^2 - & x & -6 & \\
& -3x^3 & -6x^2 & & & \\ \cline{2-5}
& & x^2 - & x & -6 & \\
& & x^2 + & 2x & & \\ \cline{3-5}
& & & -3x & -6 & \\
& & & -3x & -6 & \\ \cline{4-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)\underbrace{(x^3 - 3x^2 + x - 3)}_{P_3(x)}.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -3 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 3$. $P_3(-3) = -60$, $P_3(3) = 0$ also ist $x_3 = 3$ Nullstelle von $P_3(x)$. Also ist $P_3(x) = (x-3)P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom Grad 2 ist.

$$\begin{array}{rrl}
(x^3 - 3x^2 & + x - 3\,) & : (x-3) = x^2 + 1 \\
x^3 - 3x^2 & & \\ \hline
& x - 3 & \\
& x - 3 & \\ \cline{2-2}
& 0 &
\end{array}$$

Also ist

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)\underbrace{(x^2+1)}_{P_2(x)}.$$

Da $P_2(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ somit

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+1).$$

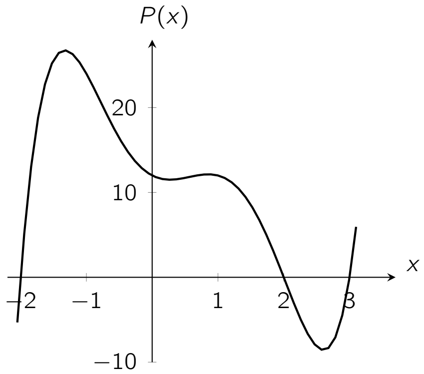


Abbildung 7: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 4x + 12$

Die reellen Nullstellen sind $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$. Auch hier kann man aus dieser Darstellung wieder mit Hilfe einer Vorzeichentabelle ermitteln, für welche Werte von x das Polynom $P(x)$ positive bzw. negative Werte annimmt.

Beispiel 5.17. Sei $P(x) = x^4 - 32\,x^3 + 366\,x^2 - 1760\,x + 3025$ (Polynom vierten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten). Die Teiler des Absolutgliedes 3025 sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 25, \pm 55, \pm 121, \pm 275, \pm 605, \pm 3$ Diese Werte kann man nun in $P(x)$ einsetzen und prüfen, ob es sich um eine Nullstelle handelt. $P(1) = 1600$, $P(-1) = 5184$, $P(5) = 0$ also ist $x_1 = 5$ Nullstelle von $P(x)$.

Also ist $P(x) = (x-5)\,P_3(x)$, wobei $P_3(x)$ ein Polynom vom Grad 3 ist.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^4 - 32x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025\,) & : (x-5) = x^3 - 27x^2 + 231x - 605 \\
x^4 - 5x^3 & & & & \\
\hline
-27x^3 & +366x^2 & -1760x & +3025 & \\
-27x^3 & +135x^2 & & & \\
\hline
 & 231x^2 & -1760x & +3025 & \\
 & 231x^2 & -1155x & & \\
\hline
 & & -605x & +3025 & \\
 & & -605x & +3025 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist

$$P(x) = (x-5)\underbrace{(x^3 - 27\,x^2 + 231\,x - 605)}_{P_3(x)}\,.$$

Die Teiler des Absolutgliedes -605 von $P_3(x)$ sind: $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 55, \pm 121, \pm 605$, wobei wir ± 1 nicht mehr probieren müssen.

$P_3(5) = 0$, also ist 5 Nullstelle von $P_3(x)$ (doppelte Nullstelle von $P(x)$).

$\implies$ $P_3(x) = (x-5)\,P_2(x)$ bzw. $P(x) = (x-5)^2 P_2(x)$, wobei $P_2(x)$ ein Polynom vom

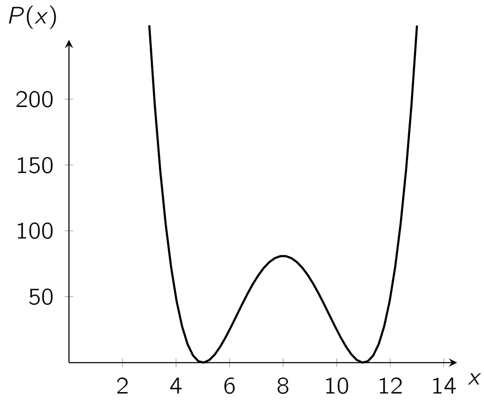


Abbildung 8: $P(x) = x^4 - 32\,x^3 + 366\,x^2 - 1760\,x + 3025 = (x-5)^2\,(x-11)^2$

Grad 2 ist.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 27x^2 + 231x - 605) : (x-5) = x^2 - 22x + 121 \\
\underline{x^3 - 5x^2} \\
\quad -22x^2 + 231x - 605 \\
\quad \underline{-22x^2 + 110x} \\
\qquad\qquad 121x - 605 \\
\qquad\qquad \underline{121x - 605} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$P(x) = (x-5)^2 \underbrace{(x^2 - 22\,x + 121)}_{P_2(x)} = (x-5)^2 \underbrace{(x-11)^2}_{P_2(x)} \qquad \text{(binomische Formel).}$$

Die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ ist somit

$$P(x) = (x-5)^2(x-11)^2\,.$$

Die doppelten reellen Nullstellen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = 11$. Da Quadrate stets nicht-negativ sind, können wir aus dieser Darstellung ablesen, dass $P(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.4 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen

Definition 5.18. Seien

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

und

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Polynome vom Grad n bzw. m (wobei $Q(x)$ nicht das *Nullpolynom* sein darf). Dann heißt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Funktion mit dem Definitionsbereich

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\} \ .$$

Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.
Haben $P(x)$ und $Q(x)$ gemeinsame Nullstellen, so kann man zugehörige Linearfaktoren kürzen. Verschwindet dadurch diese Nullstelle im Nenner so spricht man von einer *behebbare Definitionslücke* von f. Im Funktionsgraph befindet sich an dieser Stelle eine Lücke, da die Funktion f hier nicht definiert ist.
Liegt die rationale Funktion $f(x) = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von $\tilde{P}(x)$ die Nullstellen von f und die Nullstellen von $\tilde{Q}(x)$ die *Polstellen* von f. An diesen „echten" Polstellen strebt f gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

Beispiel 5.19. Die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

Durch Kürzen erhält man die Funktion

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $g(x)$ besitzt Nullstellen für $x = -1$ und $x = 2$ und eine Polstelle für $x = 1$. Für $x \in \mathbb{D}_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

Satz 5.20. *Ist der Grad des n Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad m des Nennerpolynoms, so lässt sich $f(x)$ schreiben als*

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

wobei $N(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $R(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet.

Die Polynome $N(x)$ und $R(x)$ erhält man durch Polynomdivision.
Für große Werte von $|x|$ ist $f(x) \approx N(x)$; $N(x)$ heißt *Asymptote*.

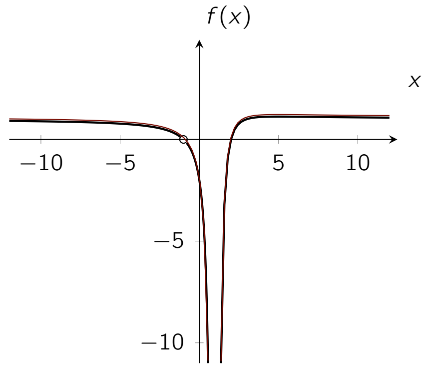


Abbildung 9: Rationale Funktionen $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{x^3-x^2-x+1}$ und vollständig gekürzt $g(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$

Beispiel 5.21. Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}.$$

Polynomdivision (mit Rest) liefert

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^3 & & - & 2x & + & 3) \quad : (x^2 - x - 2) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2} \\
x^3 & - & x^2 & - & 2x & \\
\hline
& & x^2 & & + & 3 \\
& & x^2 & - & x & - \; 2 \\
\hline
& & & & x & + \; 5
\end{array}$$

d. h.

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{x^2 - x - 2}$$

$N(x) = x + 1$ ist Asymptote von $f(x)$.

5.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Exponentialfunktion

Definition 5.22. Sei $a > 0$. Die Funktion $f(x) = a^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion*. Dabei heißt a *Basis* und x *Exponent*.

Bemerkung 5.23. Eine besondere Rolle spielt die Basis $e \approx 2,71828182846$, die *Eulersche Zahl*. e ist eine irrationale Zahl, kann also weder als Bruch noch als Dezimalbruch exakt dargestellt werden. Die zugehörige Exponentialfunktion nennt man auch die *e-Funktion*.

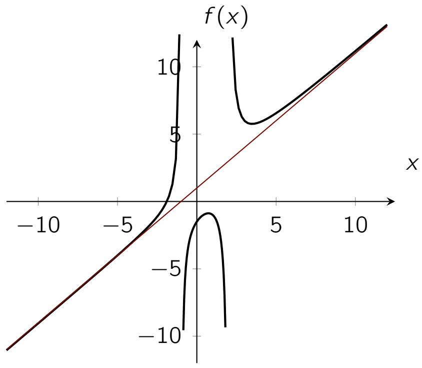


Abbildung 10: Rationale Funktionen $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{x+5}{x^2-x-2}$

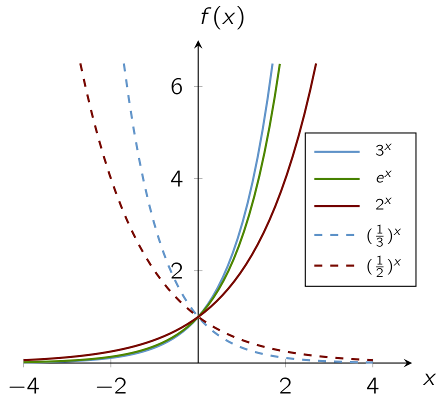


Abbildung 11: Exponentialfunktionen

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

$f(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$	$f(x) = a^x$ $(a > 1)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$
keine Nullstellen	keine Nullstellen
streng monoton fallend	streng monoton steigend

Bemerkung 5.24. Der Graph der Funktion $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ ist die Spiegelung des Graphen von $f(x) = a^x$ an der y-Achse.

Logarithmusfunktion

Definition 5.25. Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Die Funktion $f(x) = \log_a x$ heißt *Logrithmusfunktion zur Basis a*.
Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $g(x) = a^x$.

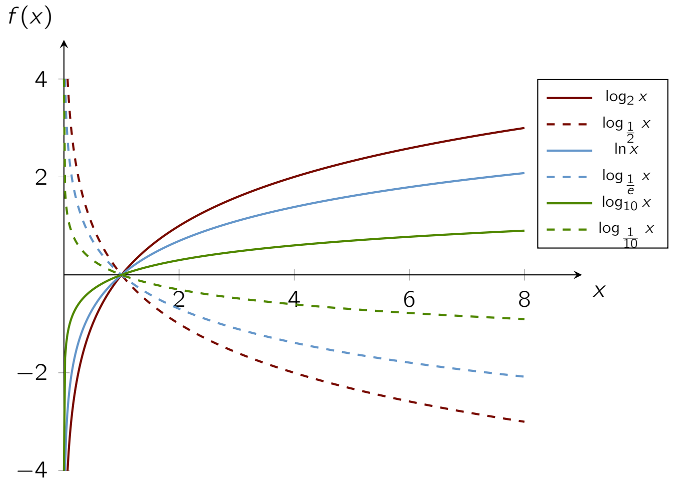


Abbildung 12: Logarithmusfunktionen für die Basen: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{2}$, 2, e und 10

Eigenschaften der Logarithmusfunktionen

$f(x) = \log_a x \ \ (0 < a < 1)$	$f(x) = \log_a x \ \ (a > 1)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Nullstelle $x_0 = 1$	Nullstelle $x_0 = 1$
streng monoton fallend	streng monoton steigend

5.6 Übersicht Funktionsgraphen

In Abbildung 14 sind die Graphen einiger grundlegender Funktionentypen im Vergleich dargestellt.

6 Folgen, Reihen, Grenzwerte

6.1 Folgen

Definition 6.1. Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ (oder $n \in \mathbb{N}$) eine reelle Zahl $a_n = f(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt reelle *Zahlenfolge*.
Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, kurz (a_n), oder $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
a_n heißt n-tes *Folgenglied*, n heißt *Index*.
Statt durch die Angabe der Funktionsvorschrift (Bildungsgesetz) kann man Folgen auch durch das Auflisten der Folgenglieder (Funktionswerte) oder durch eine Rekursion (d. h., eine Bezugnahme auf vorhergehende Folgenglieder) angeben.

Beispiel 6.2.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

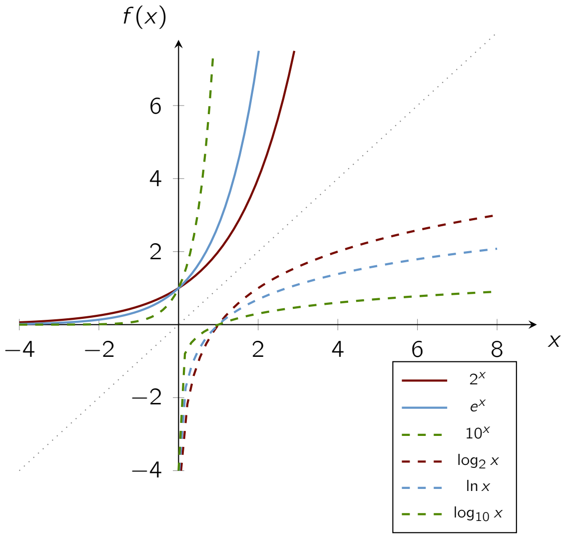


Abbildung 13: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion zur selben Basis sind Umkehrfunktionen voneinander, ihre Graphen sind daher Spiegelungen an der Winkelhalbierenden $f(x) = x$ (graue Linie).

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a_0 = 1,\; a_1 = 1,\;$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ Fibonacci-Folge
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Bei der Folge (b_n) erkennt man, dass die Folgenglieder für wachsendes n gegen Null tendieren, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Definition 6.3. Gegeben sei eine unendliche Folge (a_n). Nähert sich a_n für wachsendes n genau einer Zahl G immer mehr an, so heißt G der *Grenzwert der Folge*. Man schreibt dann

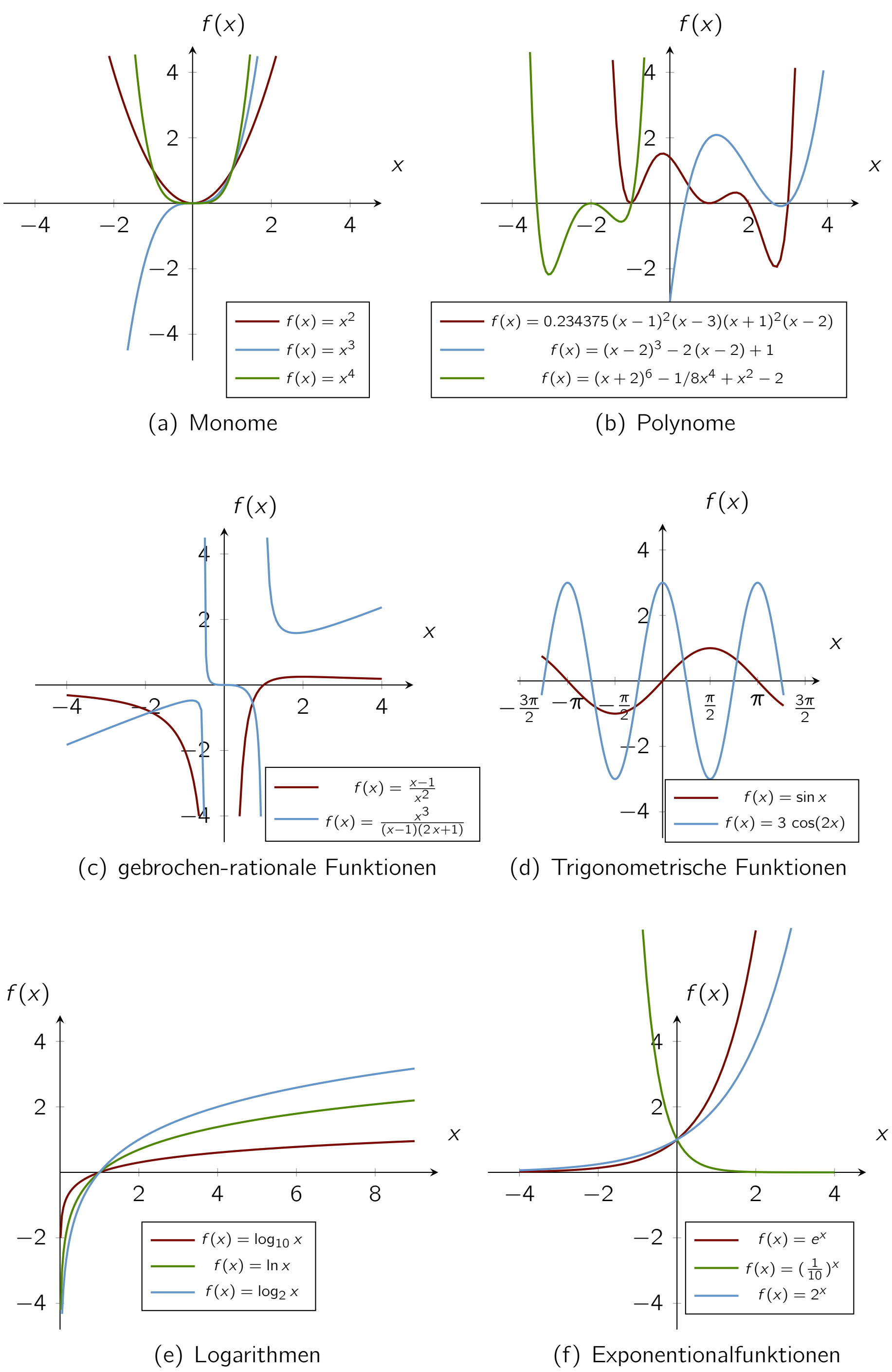
$$\lim_{n\to\infty} a_n = G$$

und sagt, die Folge (a_n) ist *konvergent* bzw. sie *konvergiert gegen G*.
Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \; : \; |a_n - G| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0 \, .$$

Hat die Folge keinen (endlichen) Grenzwert, so heißt sie *divergent*.

xunit=0.6cm,yunit=0.6cm



(a) Monome

(b) Polynome

(c) gebrochen-rationale Funktionen

(d) Trigonometrische Funktionen

(e) Logarithmen

(f) Exponentionalfunktionen

Abbildung 14: Graphen einiger häufig auftretender Funktionentypen

Beispiel 6.4. Wir betrachten wieder die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Beispiel 5.2.

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

denn

$$|b_n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > -\log_2(\varepsilon).$$

Damit existiert für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, nämlich z. B. $n_0 = \lceil -\log_2(\varepsilon)\rceil$, so dass $|a_n - 0| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$. Formal:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \; : \quad \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0 \, .$$

Beispiel 6.5 (Divergente Folgen)**.**

- $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(+1, -1, +1, -1, \dots\right)$ ist divergent.
- $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2, 4, 8, 16, 32, \dots\right)$ ist divergent
  Die Folgenglieder wachsen über jede Schranke.
  In einem solchen Fall schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$
- $\left(-n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-1, -4, -9, -16, -25, \dots\right)$ ist divergent
  Die Folgenglieder fallen unter jede beliebige Schranke.
  In einem solchen Fall schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$

Satz 6.6 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G_a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = G_b$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot G_a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = G_a + G_b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = G_a - G_b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = G_a \cdot G_b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{G_a}{G_b}, \qquad \textit{falls } G_b \neq 0$$

Definition 6.7. Eine Folge (a_n) heißt *arithmetisch*, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist, d. h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{mit einer konstanten Zahl } d \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ *Aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge unterscheiden sich um dieselbe additive Konstante.*

Beispiel 6.8 (Lineare Abschreibung)**.** Eine Maschine wird für €25000 angeschafft. Es wird angenommen, dass der Wertverlust jährlich 10% des Anschaffungswerts beträgt. Der Restwert reduziert sich also um jährlich €2500.
Bezeichnen wir den Restwert nach n Jahren mit R_n, so erhalten wir:

$$R_0 = 25000, \quad R_1 = 22500, \quad R_2 = 20000, \quad R_3 = 17500, \quad R_4 = 15000, \quad R_5 = 12500,$$
$$R_6 = 10000, \quad R_7 = 7500, \quad R_8 = 5000, \quad R_9 = 2500, \quad R_{10} = 0$$

Dies ist eine endliche(!) arithmetische Folge $(R_n)_{n=0}^{10}$ mit

$$R_{n+1} = R_n - 2500, \quad n = 0, \dots, 9$$

Definition 6.9. Eine Folge (a_n) heißt *geometrisch*, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist, d. h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= q \quad \text{mit einer konstanten Zahl } q \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow a_{n+1} &= a_n \cdot q \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ *Aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Folge unterscheiden sich um dieselbe multiplikative Konstante.*

Beispiel 6.10. Die Zinseszins-Formel

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

definiert eine geometrische Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$K_{n+1} = K_n \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Konvergenz geometrischer Folgen
Aus der Definition kann man direkt den folgenden Aufbau einer geometrischen Folge ablesen:

$$a_0, \qquad a_1 = a_0 \cdot q, \qquad a_2 = a_0 \cdot q^2, \qquad a_3 = a_0 \cdot q^3, \ \dots$$

Für welche Werte von q konvergiert die Folge?

$$\begin{aligned} (0.1^n) &= (1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, \dots) \\ (0.9^n) &= (1, 0.9, 0.81, 0.729, 0.6251, 0.59049, \dots, 0.9^{25} = 0.071789, \dots) \\ (1.1^n) &= (1, 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, 1.61051, \dots, 1.1^{25} = 10.8347, \dots) \\ ((-0.1)^n) &= (1, -0.1, 0.01, -0.001, 0.0001, -0.00001, \dots) \\ ((-0.9)^n) &= (1, -0.9, 0.81, -0.729, 0.6251, -0.59049, \dots) \\ ((-1.1)^n) &= (1, -1.1, 1.21, -1.331, 1.4641, -1.61051, \dots) \end{aligned}$$

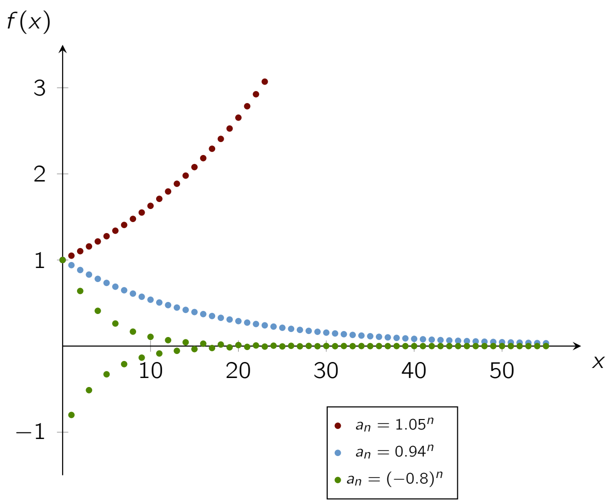


Abbildung 15:

Satz 6.11. *Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Die Folge $\left(q^n\right)$ *ist divergent, falls* $q \notin (-1, 1]$.

6.2 Reihen

Summiert man die (ersten n) Folgenglieder einer Folge auf so erhält man eine sog. (endliche oder) unendliche *Reihe*.

Definition 6.12. Summiert man die ersten n Folgenglieder einer geometrischen Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so erhält man

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j.$$

S_n heißt *geometrische Summe* oder auch *Partialsumme* der geometrischen Reihe.

Beispiel 6.13 (Schachlegende)**.** Einer Legende zufolge soll der Erfinder des Schachspiels *Sissa ibn Dahir* bei dem indische Herrscher Shihra einen Wunsch frei gehabt haben. Worauf er sich ein Schachbrett voller Reiskörner wünschte und zwar auf dem ersten Feld des Schachbretts ein Reiskorn, auf dem zweiten zwei, auf dem dritten vier, ... auf jedem Feld doppelt so viele Reiskörner wie auf dem Feld zuvor. Die Gesamtzahl der Reiskörner auszurechnen ist zwar ganz einfach aber ziemlich aufwändig (wenn auch nicht unmöglich).

$$\sum_{i=0}^{63} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{63}$$

$$= 18.446.744.073.709.551.615$$

Es gibt aber eine viel schnellere Methode eine endliche geometrische Summe zu berechnen.

Formel für geometrische Summen

$q = 1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1^j = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} = n$$

$q \neq 1$

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + q \ + q^2 + \ldots + \ q^{n-1} \\ q \cdot S_n = & \qquad q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n \\ \hline (1-q) \cdot S_n = & 1 - q^n \end{array}$$

Da $q \neq 1$ ist, gilt: $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$

Insgesamt erhalten wir die Formel für (endliche) geometrische Summen:

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{für } q \neq 1 \\ n, & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beispiel 6.14 (nochmal die Schachlegende)**.**

$$\sum_{i=0}^{63} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18.446.744.073.709.551.615$$

Beispiel 6.15. Desiré Mustermann möchte für die Zukunft vorsorgen und überlegt sich folgendes Modell: Über einen Zeitraum von 20 Jahren will sie jeweils zu Jahresbeginn 1000 € anlegen, die zum Jahresende mit 3% verzinst werden. Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen. Wie viel hat sie nach 20 Jahren gespart?

$$\begin{aligned} &1000(1+0.03)^{20} + 1000(1+0.03)^{19} + 1000(1+0.03)^{18} + \ldots 1000(1+0.03) = \\ &= 1000\left(1.03 + 1.03^2 + \ldots + 1.03^{19} + 1.03^{20}\right) = \\ &= 1000 \cdot \sum_{j=1}^{20} 1.03^j = 1000 \cdot 1.03 \cdot \sum_{j=0}^{19} 1.03^j = 1030 \cdot \frac{1 - 1.03^{20}}{1 - 1.03} \approx 27676.49 \end{aligned}$$

Unendliche geometrische Reihen
In manchen Zusammenhängen will man nicht nur den Wert einer geometrischen Summe bis zu einem bestimmten Index n berechnen, sondern die Summation beliebig lange fortsetzen.
Das ist äquivalent zur Frage, unter welchen Voraussetzungen der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + \dots$$

existiert und welchen Wert er gegebenenfalls hat.

Satz 6.16. *Es sei* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} q^j\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine geometrische Reihe. Dann gilt:*

für $q = 1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$
d. h. (S_n) *ist divergent.*

für $|q| < 1$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$
d. h. (S_n) *ist konvergent mit dem Grenzwert* $\frac{1}{1-q}$

für $|q| > 1$: (S_n) *ist divergent.*

6.3 Grenzwerte von Funktionen

Der Grenzwert einer Funktionen ist der zentrale Begriff der Analysis, auf dem viele weitere wichtige Definitionen basieren, wie Stetigkeit, Differentiation und Integration. Wir erweitern dazu den Grenzwertbegriff, den wir für Folgen eingeführt haben, nun auf Funktionen.

Beispiel 6.17. Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x+2}$$

ist an der Stelle $x = -2$ nicht definiert: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Untersucht man die Funktionswerte in der Nähe der Definitionslücke so erhält man die folgenden gerundeten Werte:

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-1.9999	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	8.6100	8.0601	8.0060	8.0006	7.9994	7.9940	7.9401	7.4100

Die Funktionswerte nähern sich demnach dem Wert 8 immer mehr an je näher x an -2 rückt.

Für diese Funktion kann man diese Annäherung auch formal zeigen, denn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x+2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x+2} = x(x-2)$$

Definition 6.18. Seien f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_f$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Wenn für beliebige Folgen (x_n), die von links oder rechts gegen x_0 konvergieren, die zugehörigen Funktionswerte gegen einen Wert G streben, so heißt G *Grenzwert* oder *Limes von f für x gegen x_0*.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G$$

$\longrightarrow$ Die Bedingung $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_f$ bedeutet, dass die Funktion f in einer Umgebung von x_0 definiert sein muss. Diese Umgebung kann aber beliebig klein sein.

Betrachtet man nur Folgen, die sich von rechts bzw. von links an die Stelle x_0 annähern, so spricht man von *rechtsseitigem* bzw. *linksseitigem Grenzwert*:

$$\lim_{x \to x_0^+} = G_R \qquad \lim_{x \to x_0^-} = G_L$$

Stimmen rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert überein, d. h. $G_R = G_L$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G = G_R = G_L$$

Satz 6.19 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen)**.** *Seien f und h Funktionen mit den Grenzwerten $\lim_{x \to x_0} f(x) = G_f$ und $\lim_{x \to x_0} h(x) = G_h$ und sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot G_f \\
&\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + h(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f + G_h \\
&\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - h(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f - G_h \\
&\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f \cdot G_h \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} h(x)} = \frac{G_f}{G_h}, \qquad \text{falls } G_h \neq 0
\end{aligned}$$

7 Grundlagen der Aussagenlogik

Aussagenlogik

Definition 7.1. Unter einer *Aussage* versteht man eine Behauptung, von der eindeutig entschieden werden kann, ob sie *wahr* oder *falsch* ist. Einer Aussage ordnet man die Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zu.

A	$\neg \boldsymbol{A}$
w	**f**
f	**w**

Tabelle 2: Wahrheitstafel von $\neg A$

Beispiel 7.2.
A 169 ist eine Primzahl. (f)
B 169 ist eine Quadratzahl. (w)
C Wien ist die Hauptstadt der Schweiz. (f)
D Der Vorkurs Mathematik ist nützlich.
Keine Aussage, da die Behauptung nicht objektiv als wahr oder falsch klassifiziert werden kann, auch wenn wir hoffen, dass viele von Ihnen das am Kursende subjektiv so empfinden.

Bezeichnung 7.3. *Ist A eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen „nicht A") die* Negation *der Aussage A.*

$\neg A$ ist wieder eine Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist und falsch ist, wenn A wahr ist.

Beispiel 7.4.
A $2+2=4$ (w)
$\neg A$ $2+2\neq 4$ (f)
B Alle Menschen sind sterblich. (w)
$\neg B$ Es existiert ein Mensch, der nicht sterblich ist. (f)

Das letzte Beispiel zeigt, dass bei Negationen genau auf die Formulierung zu achten ist.

C Alle Menschen sind unsterblich. (f)
Dies ist *nicht* die Negation von Aussage B.
D Für alle natürlichen Zahlen n gilt $n+3=6$. (f)
$\neg D$ Es existiert eine natürliche Zahl n, so dass $n+3\neq 6$ gilt. (w)

7.1 Verknüpfungen von Aussagen

Verknüpfungen von Aussagen

Definition 7.5. Sind A und B Aussagen, so wird durch $A\wedge B$ (gesprochen „A und B") eine neue Aussage, die *Konjunktion* von A und B definiert.

$A\wedge B$ ist eine wahre Aussage, wenn sowohl A als auch B wahre Aussagen sind. Anders ausgedrückt ist $A\wedge B$ falsch, wenn (mindestens) eine der beiden Aussagen falsch ist.

A	B	$\boldsymbol{A \wedge B}$
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**f**
f	f	**f**

Tabelle 3: Wahrheitstafel von $A \wedge B$

Beispiel 7.6.

A	$2+2=4$ (w)
B	169 ist eine Primzahl (f)
C	169 ist eine Quadratzahl (w)
$A \wedge B$	$2+2=4$ und 169 ist eine Primzahl (f)
$A \wedge C$	$2+2=4$ und 169 ist eine Quadratzahl (w)
$B \wedge C$	169 ist eine Primzahl und eine Quadratzahl (f)

Definition 7.7. Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \vee B$ (gesprochen „A oder B“) eine neue Aussage, die *Disjunktion* (nicht ausschließendes oder) von A und B definiert. $A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist. Anders ausgedrückt ist $A \vee B$ nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsch sind. Meint man „entweder A oder B“, so schreibt man $A \dot{\vee} B$ und spricht vom „exklusiven Oder“.

A	B	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{A \dot{\vee} B}$
w	w	**w**	**f**
w	f	**w**	**w**
f	w	**w**	**w**
f	f	**f**	**f**

Tabelle 4: Wahrheitstafel von $A \vee B$ und $A \dot{\vee} B$

Beispiel 7.8.

A	$2+2=4$ (w)
B	169 ist eine Primzahl (f)
C	169 ist eine Quadratzahl (w)
$A \vee B$	$2+2=4$ oder 169 ist eine Primzahl. (w)
$A \vee C$	$2+2=4$ oder 169 ist eine Quadratzahl. (w)
$B \vee C$	169 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl. (w)

Bemerkung 7.9. Dieses Beispiel macht deutlich, dass sich das aussagenlogische „oder“ wesentlich vom üblichen Sprachgebrauch unterscheidet.

Definition 7.10. Sind A und B Aussagen, so wird durch $A \Rightarrow B$ (gesprochen „wenn A dann B“ oder „aus A folgt B“) wieder eine Aussage definiert, die *Implikation* (oder Folgerung).

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist nur dann eine falsche Aussage, wenn A wahr und B falsch ist.

Merke: *Aus einer falschen Aussage kann eine wahre Aussage folgen. Aus einer wahren Aussage folgt aber niemals eine falsche!*

A	B	$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$
w	w	**w**
w	f	**f**
f	w	**w**
f	f	**w**

Tabelle 5: Wahrheitstafel von $A \Longrightarrow B$

Beispiel 7.11.

A	2 ist Teiler von 18. (w)
B	4 ist Teiler von 18. (f)
$A \Rightarrow B$	Wenn 2 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (f)
$B \Rightarrow A$	Wenn 4 Teiler von 18 ist, dann ist 2 Teiler von 18. (w)

Bezeichnung 7.12. *Sind A und B Aussagen, dann ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ebenfalls eine Aussage, die Äquivalenzrelation $A \Longleftrightarrow B$ (gesprochen „A äquivalent zu B“ oder „A genau dann wenn B“).*
$A \Longleftrightarrow B$ ist eine wahre Aussage, wenn A und B die gleichen Wahrheitswerte haben, d. h. entweder beide wahr oder beide falsch sind.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
w	w	w	w	**w**
w	f	f	w	**f**
f	w	w	f	**f**
f	f	w	w	**w**

Tabelle 6: Wahrheitstafel von $A \Longleftrightarrow B$

Beispiel 7.13.

A	2 ist Teiler von 18. (w)
B	4 ist Teiler von 18. (f)
$A \Rightarrow B$	Wenn 2 Teiler von 18 ist, dann ist 4 Teiler von 18. (f)
$B \Rightarrow A$	Wenn 4 Teiler von 18 ist, dann ist 2 Teiler von 18. (w)
$A \Leftrightarrow B$	2 ist Teiler von 18, genau dann wenn 4 Teiler von 18 ist. (f)

7.2 Umformungsregeln

Umformungsregeln

$A \wedge B$	$\iff$	$B \wedge A$	(Kommutativgesetz)
$A \vee B$	$\iff$	$B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C)$	$\iff$	$(A \wedge B) \wedge C$	(Assoziativgesetz)
$A \vee (B \vee C)$	$\iff$	$(A \vee B) \vee C$	
$A \wedge (B \vee C)$	$\iff$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(Distributivgesetz)
$A \vee (B \wedge C)$	$\iff$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
$\neg(\neg A)$	$\iff$	A	(Doppelte Verneinung)
$\neg(A \wedge B)$	$\iff$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	(Regel von De Morgan)
$\neg(A \vee B)$	$\iff$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	

A	B	C	$B \wedge C$	$\boldsymbol{A \wedge (B \wedge C)}$	$A \wedge B$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \wedge C}$
w	w	w	w	**w**	w	**w**
w	w	f	f	**f**	w	**f**
w	f	w	f	**f**	f	**f**
w	f	f	f	**f**	f	**f**
f	w	w	w	**f**	f	**f**
f	w	f	f	**f**	f	**f**
f	f	w	f	**f**	f	**f**
f	f	f	f	**f**	f	**f**

Tabelle 7: Wahrheitstafel zum Assoziativgesetz $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

Beispiel 7.14 (Assoziativgesetz)**.**

A:	2 ist Teiler von 6. (w)
B:	3 ist Teiler von 6. (w)
C:	4 ist Teiler von 6. (f)
$A \wedge (B \wedge C)$:	2 Teiler von 6 und (3 und 4 Teiler von 6) (f)
$(A \wedge B) \wedge C$:	(2 und 3 Teiler von 6) und 4 Teiler von 6 (f)

Das Assoziativgesetz besagt, dass die Klammern weggelassen werden dürfen. Man kann auch sagen: 2 und 3 und 4 sind Teiler von 6. (f)

Beispiel 7.15 (Doppelte Verneinung).

A	2 ist Teiler von 6. (w)
$\neg A$	2 ist nicht Teiler von 6. (f)
$\neg(\neg A)$	Es gilt nicht, dass 2 nicht Teiler von 6 ist. (w)
B	Jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)
$\neg B$	Es gilt nicht, dass jede Primzahl $p > 2$ ungerade ist. (f) bzw. es existiert eine Primzahl $p > 2$, die gerade ist. (f)
$\neg(\neg B)$	Es gilt nicht, dass es eine Primzahl $p > 2$ gibt, die gerade ist. (w) bzw. jede Primzahl $p > 2$ ist ungerade. (w)

Definition 7.16. Eine Aussage, die aus der Verknüpfung mehrerer Aussagen hervorgeht, ist eine *Tautologie*, wenn für alle möglichen Wahrheitswerte der für die Verknüpfung verwendeten Aussagen, die Aussage insgesamt *stets wahr* ist.

Beispiel 7.17.

- $A \vee (\neg A)$, der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*, ist eine Tautologie. Es regnet oder es regnet nicht – es gibt keine dritte Möglichkeit.

A	$\neg A$	$\boldsymbol{A \vee (\neg A)}$
w	f	**w**
f	w	**w**

Tabelle 8: Wahrheitstafel von $A \vee (\neg A)$

- $\neg(A \wedge (\neg A))$, das *Gesetz vom Widerspruch*, ist eine Tautologie. Es regnet und es regnet nicht ist immer falsch, die Negation daher stets richtig.

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$	$\boldsymbol{\neg(A \wedge (\neg A))}$
w	f	f	**w**
f	w	f	**w**

Tabelle 9: Wahrheitstafel von $\neg(A \wedge (\neg A))$

- $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ ist eine Tautologie.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow ((\neg \boldsymbol{A}) \vee \boldsymbol{B})$
w	w	w	f	w	**w**
w	f	f	f	f	**w**
f	w	w	w	w	**w**
f	f	w	w	w	**w**

Tabelle 10: Wahrheitstafel von $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$

7.3 Aussageformen

Definition 7.18. Eine *Aussageform* ist eine Behauptung, die eine oder mehrere Variablen enthält. Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn für die Variablen Elemente der zugehörigen Grundmenge Ω eingesetzt werden.
Setzt man Elemente der Grundmenge ein, so dass die Aussageform eine wahre Aussage ergibt, so nennt man diese Elemente Lösungen der Aussageform. Die Menge aller Lösungen einer Aussageform, nennt man Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

Beispiel 7.19. Grundmenge: $\Omega = \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen)

$A(x)$	$x + 7 = 0$		ist eine Aussageform mit der Variablen x.
$A(-7)$	$-7 + 7 = 0$	(w)	ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (w).
$A(0)$	$0 + 7 = 0$	(f)	ist eine Aussage mit dem Wahrheitswert (f).

Bemerkung 7.20. Aussageformen mit demselben Grundbereich kann man wie Aussagen miteinander verknüpfen und erhält wieder eine Aussageform.

8 Kombinatorik

8.1 Kombinatorische Grundlagen

Kombinatorische Grundlagen

In vielen ökonomischen Fragestellungen treten Fragestellungen auf, bei denen verschiedene Möglichkeiten der Anordnung und Zusammenstellung von Elementen einer Menge zu bestimmen sind. Aufgabenstellungen dieser Art werden in der *Kombinatorik* behandelt.
Im Folgenden werden die verschiedenen Fragestellungen zunächst jeweils an einem Beispiel erläutert und dann in allgemeiner Form behandelt.

Multiplikationssatz

Beispiel 8.1. Ein Restaurant bietet auf seiner Mittagskarte zwei verschiedene Suppen, fünf Hauptgerichte und zwei Desserts an. Wie viele verschiedene Menüs lassen sich daraus zusammenstellen?

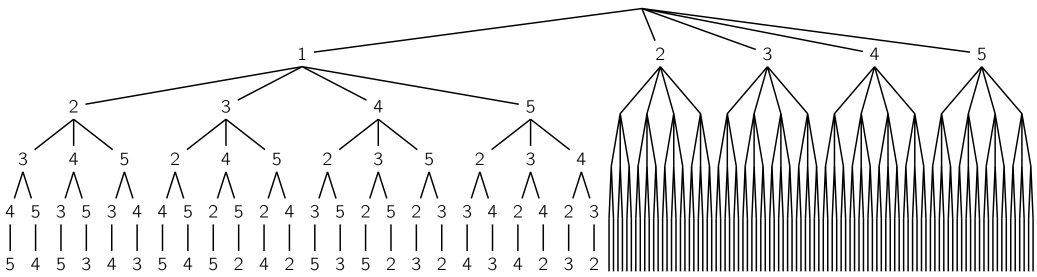


Abbildung 16: Baumdiagramm „Hausbesuche“, Beispiel 8.4

Aus dem Baumdiagramm lässt sich die Anzahl der Möglichkeiten als 20 ablesen.

Jede der beiden Suppen kann mit jedem der fünf Hauptgerichte kombiniert werden, und jede dieser Kombinationen kann wiederum mit jedem der beiden Desserts kombiniert werden. Es gibt also insgesamt

$$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ verschiedene Menüzusammenstellungen.}$$

Satz 8.2 (Multiplikationssatz)**.** *Seien $k \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$. Wählt man aus jeder von k Mengen, die jeweils m_i Elemente enthalten genau ein Element aus, so gibt es dafür insgesamt*

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \text{ Möglichkeiten.}$$

Beispiel 8.3. Wie viele gerade vierstellige Zahlen lassen sich bilden, wenn die erste und die dritte Ziffer ungerade sein sollen?
Für die erste und dritte Ziffer gibt es jeweils 5, für die zweite 10 und für die vierte Ziffer wieder 5 Möglichkeiten, insgesamt also

$$5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 1250 \text{ Möglichkeiten.}$$

Permutationen

Beispiel 8.4. Ein Arzt soll nacheinander Hausbesuche bei fünf seiner Patienten machen. Wie viele Möglichkeiten in Bezug auf die Reihenfolge der Patienten hat der Arzt, seine Hausbesuche zu erledigen?

Für den ersten Hausbesuch kommen alle fünf Patienten in Frage, zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Hausbesuch noch vier Möglichkeiten usw. bis für den letzten Hausbesuch nur noch jeweils eine Möglichkeit besteht, insgesamt also

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ Möglichkeiten.}$$

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als *Permutation* der Elemente.

Satz 8.5. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

gesprochen „n Fakultät", Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente anzuordnen.

Beispiel 8.6.
- Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
- Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll? Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Auswahl mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel 8.7. Ein Arzt will zwei der fünf anstehenden Hausbesuchen vor seiner Mittagspause erledigen, die restlichen drei kann er erst nachmittags machen.
Wie viele verschiedenen Möglichkeiten gibt es für den Arzt, seine Route für die Hausbesuche am Vormittag zu planen?

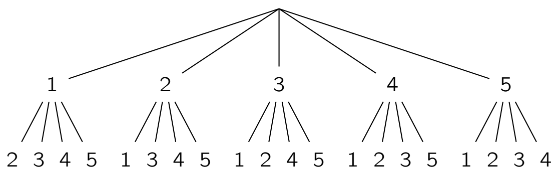


Abbildung 17: Baumdiagramm „Hausbesuche vormittags", Beispiel 8.7

Aus dem Baumdiagramm ergeben sich $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten.

Satz 8.8. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge auf*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Arten auswählen.

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel 8.9. Beim Lotto werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?
Wir starten mit folgender Überlegung: Wenn wir zunächst die Reihenfolge der getippten Zahlen berücksichtigen, so gibt es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Die Reihenfolge (in der die Kugeln fallen, bzw. die Zahlen getippt werden) ist aber unerheblich. $1, 2, 7, 15, 17, 39$ und $2, 7, 39, 15, 17, 1$ beschreiben den gleichen Tipp, das gleiche Ergebnis. Man kann diese 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.

Bei den oben genannten $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp $6!$ mal vor. Um die Anzahl der verschiedenen Tipps zu erhalten, muss man also noch durch $6!$ dividieren.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Satz 8.10. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auf*

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Arten auswählen.

Man verwendet häufig die abkürzende Schreibweise

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

gesprochen „n über k“ oder „k aus n“.