Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
AG Optimierung und Approximation

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgaben und Lösungen zum Vorkurs 2019

Prof. Dr. Kathrin Klamroth
Dr. Jonas Kremer
Dr. Britta Schulze
Dr. Michael Stiglmayr
Julius Bauss, M.Sc.
Anna Clevenhaus, M.Sc.
Onur Doganay, M.Sc.

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

1 Lösen von Ungleichungen

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $-x-3 \leq 5$ *b)* $3x+5 < x-13$ *c)* $3y-(y-1) \geq y-(1-y)$

d) $\frac{2a-4}{3} \leq 7$ *e)* $\frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3)$ *f)* $\frac{t}{24}-(t+1)+\frac{3t}{8} < \frac{5}{12}(t+1)$

Lösung:

a) $-x-3 \leq 5 \iff -8 \leq x \Rightarrow \mathbb{L} = [-8, \infty)$

b) $3x+5 < x-13 \iff 2x < -18 \iff x < -9 \Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, -9)$

c) $3y-(y-1) \geq y-(1-y) \iff 2y+1 \geq 2y-1 \iff 1 \geq -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R}$

d) $\frac{2a-4}{3} \leq 7 \iff 2a-4 \leq 21 \iff 2a \leq 25 \iff a \leq \frac{25}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{25}{2}\right]$

e) $\frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3) \iff 1-x \geq 6(x-3) \iff 19 \geq 7x \iff \frac{19}{7} \geq x$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{19}{7}\right]$

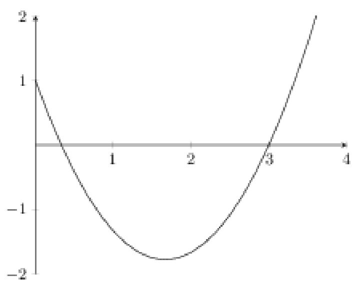
f) $\frac{t}{24}-(t+1)+\frac{3t}{8} < \frac{5}{12}(t+1) \iff t-24t-24+9t < 10t+10$
$\iff -24t < 34 \iff t > -\frac{17}{12} \Rightarrow \mathbb{L} = \left(-\frac{17}{12}, \infty\right)$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

a) $x^2-\frac{4}{3}x+2 \leq 2x+1$ *b)* $-x^2+2x \geq 35$ *c)* $4x^2+25 > 20x$

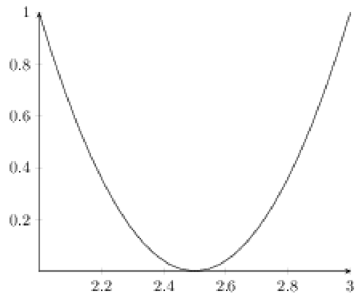
Lösung:

a) $x^2-\frac{4}{3}x+2 \leq 2x+1 \iff x^2-\frac{10}{3}x+1 \leq 0 \iff \left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3) \leq 0$
$\iff x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right] \Rightarrow \mathbb{L} = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$
Nebenrechnung: $x^2-\frac{10}{3}x+1 = 0 \iff x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}-1} \iff x = \frac{1}{3} \vee x = 3$



b) $-x^2 + 2x \geq 35 \iff x^2 - 2x + 35 \leq 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\quad\}$
Nebenrechnung: $x^2 - 2x + 35 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1 - 35}$ ergibt keine reellen Nullstellen, da die Parabel $y = x^2 - 2x + 35$ nach oben geöffnet ist und somit komplett oberhalb der x-Achse liegen muss.

c) $4x^2 + 25 > 20x \iff 4x^2 - 20x + 25 > 0 \iff (2x - 5)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$



Aufgabe 3.
Geben Sie die Definitionsmengen und die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an.

$$a)\ \frac{y}{y+5} \geq -4 \qquad b)\ \frac{x}{x+5} \leq -4 \qquad c)\ \frac{3u+25}{u+3} \geq 2u - 5$$

Lösung:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
$$\frac{y}{y+5} \geq -4 \iff \frac{y}{y+5} + 4 \geq 0 \iff \frac{5(y+4)}{y+5} \geq 0$$

		-5		-4	
$y+4$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$y+5$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$\frac{5(y+4)}{y+5}$	$+$	$\star$	$-$	$\circ$	$+$

Das Symbol $\star$ im Diagramm soll andeuten, dass der Wert nicht zur Definitionsmenge gehört.

$\Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, -5) \cup [-4, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-5, -4)$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
$$\frac{x}{x+5} \leq -4 \iff \frac{x}{x+5} + 4 \leq 0 \iff \frac{5(x+4)}{x+5} \leq 0 \Rightarrow \mathbb{L} = (-5, -4]$$

Vorzeichentabelle analog zu a) mit x statt y

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
$$\frac{3u+25}{u+3} \geq 2u - 5 \iff \frac{3u+25}{u+3} - 2u + 5 \geq 0 \iff \frac{-2u^2 + 2u + 40}{u+3} \geq 0$$
$$\iff \frac{-2(u-5)(u+4)}{u+3} \geq 0 \iff \frac{(u-5)(u+4)}{u+3} \leq 0$$

		-4		-3		5	
$u-5$	$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$
$u+4$	$-$	$\circ$	$+$		$+$		$+$
$u+3$	$-$		$-$	$\circ$	$+$		$+$
$\dfrac{(u-5)(u+4)}{(u+3)}$	$-$	$\circ$	$+$	$\star$	$-$	$\circ$	$+$

$\Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, -4] \cup (-3, 5] = (-\infty, 5] \setminus (-4, -3]$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

a) $|2x-1| \leq 4$ *b)* $|1-0.5x| \geq x+4$ *c)* $|x-2| \leq |4-3x|+1$

d) $|-2x-3| > |x+1|+4$ *e)* $2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0$

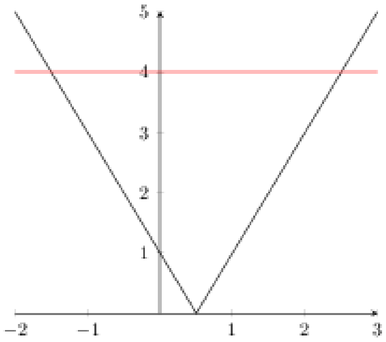
Lösung:

a) $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

1. Fall: $x \geq \dfrac{1}{2}$. Dann $|2x-1| \leq 4 \iff 2x-1 \leq 4 \iff x \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$

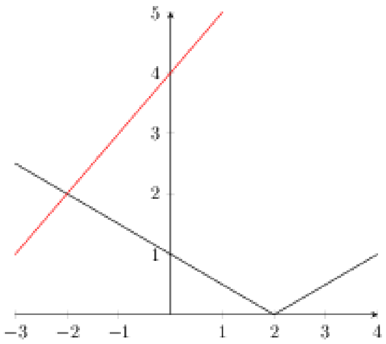
2. Fall: $x < \dfrac{1}{2}$. Dann $|2x-1| \leq 4 \iff -2x+1 \leq 4 \iff x \geq -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$

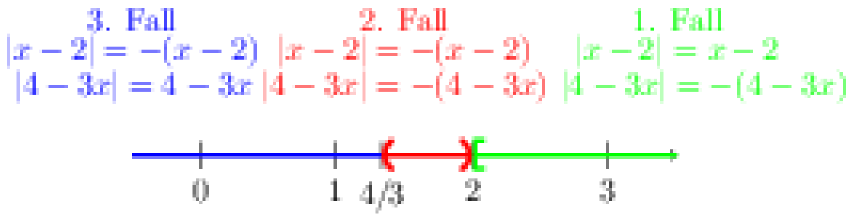


b) $|1-0.5x| = \begin{cases} 1-0.5x, & x \leq 2 \\ -1+0.5x, & x > 2 \end{cases}$

1. Fall: $x \leq 2$. Dann $|1-0.5x| \geq x+4 \iff 1-0.5x \geq x+4 \iff -2 \geq x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = (-\infty, -2]$
2. Fall: $x > 2$. Dann $|1-0.5x| \geq x+4 \iff -1+0.5x \geq x+4 \iff -10 \geq x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{\quad\}$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, -2]$



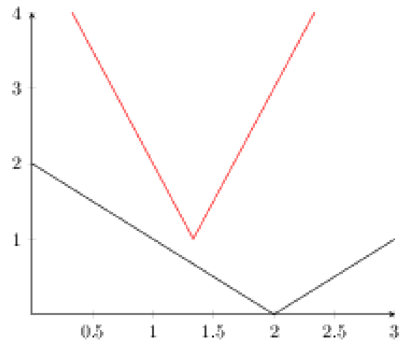
c) $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$ $\qquad |4-3x| = \begin{cases} 4-3x, & x \leq \frac{4}{3} \\ -4+3x, & x > \frac{4}{3} \end{cases}$



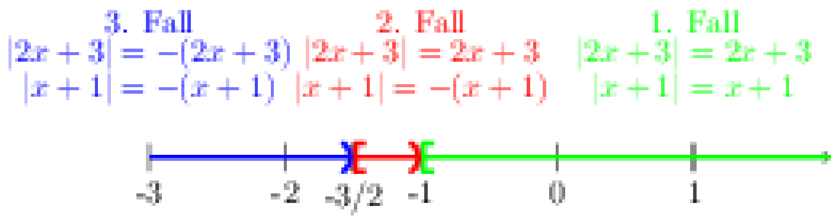
1. Fall: $x \geq 2$. Dann $|x-2| \leq |4-3x|+1 \iff x-2 \leq -4+3x+1 \iff \dfrac{1}{2} \leq x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [2, \infty)$

2. Fall: $\dfrac{4}{3} < x < 2$. Dann $|x-2| \leq |4-3x|+1 \iff -x+2 \leq -4+3x+1 \iff \dfrac{5}{4} \leq x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$

3. Fall: $x \leq \dfrac{4}{3}$. Dann $|x-2| \leq |4-3x|+1 \iff -x+2 \leq 4-3x+1 \iff \dfrac{3}{2} \geq x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right]$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \mathbb{R}$



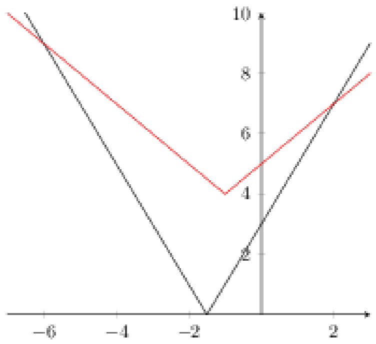
d) $|-2x-3| = |2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3, & x < -\frac{3}{2} \end{cases}$ $\qquad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$



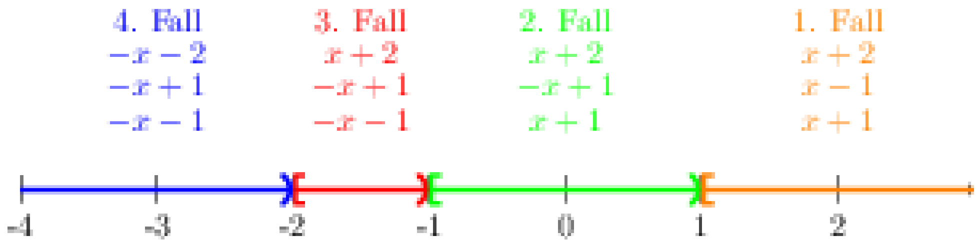
1. Fall: $x \geq -1$. Dann $|2x+3| > |x+1| + 4 \iff 2x+3 > x+1+4 \iff x > 2$
$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = (2, \infty)$

2. Fall: $-\dfrac{3}{2} \leq x < -1$. Dann $|2x+3| > |x+1| + 4 \iff 2x+3 > -x-1+4 \iff x > 0$
$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{\quad\}$

3. Fall: $x < -\dfrac{3}{2}$. Dann $|2x+3| > |x+1| + 4 \iff -2x-3 > -x-1+4 \iff -6 > x$
$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = (-\infty, -6)$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty, -6) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-6, 2]$



e) $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$ $\quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ $\quad |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases}$

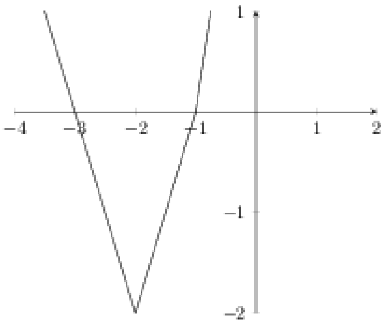


1. Fall: $x \geq 1$. Dann $2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0 \iff 2(x+2) - (x-1) + x + 1 > 0 \iff 2x + 6 > 0 \iff x > -3 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = [1, \infty)$

2. Fall: $-1 \leq x < 1$. Dann $2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0 \iff 2(x+2) - (-x+1) + x + 1 > 0 \iff 4x + 4 > 0 \iff x > -1 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = (-1, 1)$

3. Fall: $-2 \leq x < -1$. Dann $2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0 \iff 2(x+2) - (-x+1) - x - 1 > 0 \iff 2x + 2 > 0 \iff x > -1 \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{\quad\}$

4. Fall: $x < -2$. Dann $2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0 \iff 2(-x-2) - (-x+1) - x - 1 > 0 \iff -2x - 6 > 0 \iff x < -3 \Rightarrow \mathbb{L}_4 = (-\infty, -3)$
$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = [1, \infty) \cup (-1, 1) \cup (-\infty, -3) = \mathbb{R} \setminus [-3, -1]$



Aufgabe 5.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültig sind. (Mit Begründung!)

a) $x + 1 > x$ *b)* $x^2 > x$ *c)* $x + x > x$ *d)* $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Lösung:

a) Ja, denn $x + 1 > x \Leftrightarrow 1 > 0$

b) Nein, denn z.B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

c) Nein, denn $x + x > x \Leftrightarrow x > 0$

d) Ja, denn $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$

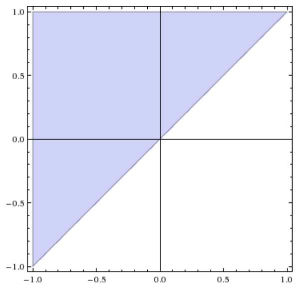
Aufgabe 6.
Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Punktmengen, die durch die folgenden Ungleichungen beschrieben werden.

a) $x - y < 0$ *b)* $y \leq x^2$ *c)* $|x| \leq |y|$

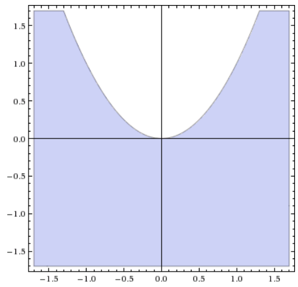
d) $x^2 + y^2 \leq 4$ *e)* $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$

Lösung:

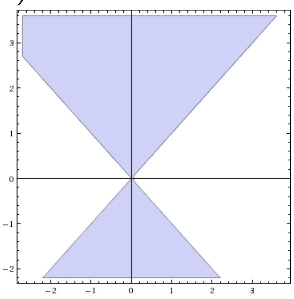
a) $x - y < 0 \iff x < y$, ohne Rand



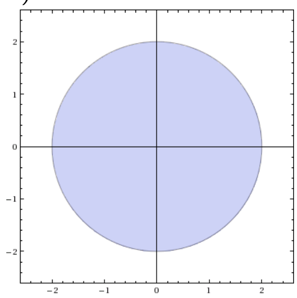
b) mit Rand



c) mit Rand



d) mit Rand



e) mit Rand