

Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
AG Optimierung und Approximation

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgaben und Lösungen zum Vorkurs 2019

Prof. Dr. Kathrin Klamroth
Dr. Jonas Kremer
Dr. Britta Schulze
Dr. Michael Stiglmayr
Julius Bauss, M.Sc.
Anna Clevenhaus, M.Sc.
Onur Doganay, M.Sc.



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

1 Lösen von Gleichungen

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0 & \text{b) } 2x(x-1) + 6 = 4(x+1) & \text{c) } 11x - 3 = 30x^2 \\ \text{d) } 7x^2 = 8x & \text{e) } 4x^2 + 4 = 8x & \text{f) } -9x^2 = 1 + 6x \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0 &\iff x = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{5}} \iff x = \frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5} \\ \Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x(x-1) + 6 = 4(x+1) &\iff 2x^2 - 2x + 6 = 4x + 4 \\ \iff x^2 - 3x + 1 = 0 &\iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} \iff x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 11x - 3 = 30x^2 &\iff x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{1}{10} = 0 \iff x = \frac{11}{60} \pm \sqrt{\frac{121}{60^2} - \frac{1}{10}} \\ \iff x &= \frac{11}{60} \pm \sqrt{\frac{121}{60^2} - \frac{360}{60^2}} \\ \Rightarrow \mathbb{L} &= \{ \} \text{ (keine reellen Lösungen, da Diskriminante negativ wird)} \end{aligned}$$

$$\text{d) } 7x^2 = 8x \iff x(7x - 8) = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{8}{7} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{8}{7} \right\}$$

$$\text{e) } 4x^2 + 4 = 8x \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$$

$$\text{f) } -9x^2 = 1 + 6x \iff 9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x+1)^2 = 0 \iff x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

Aufgabe 2.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$\text{i) } x^2 + 3x + a = 0 \qquad \text{ii) } x^2 + ax + 4 = 0$$

genau eine, zwei, gar keine Lösung?

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) i) } x^2 + 3x + a = 0 &\iff x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - a} \\ \text{genau eine Lösung: } a &= \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

zwei Lösungen: $a < \frac{9}{4}$,

keine Lösung: $a > \frac{9}{4}$

$$\text{ii) } x^2 + ax + 4 = 0 \iff x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 4} \iff x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 16}{4}}$$

genau eine Lösung: $a^2 = 16 \iff a = \pm 4$,

zwei Lösungen: $a^2 > 16 \iff a > 4 \vee a < -4$,

keine Lösung: $a^2 < 16 \iff a \in (-4, 4)$

$$\text{b) } (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2})) = 0 \iff ((x - 1) + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\iff (x - 1)^2 - 2 = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0$$

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{b) } \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{c) } \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\text{d) } x = \sqrt{3x + 10}$$

$$\text{e) } \sqrt{x + \sqrt{x + 6}} = 6$$

$$\text{f) } \sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$$

Lösung:

$$\text{a) } \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1), \text{ da } x^2 - 1 \geq 0 \iff (x - 1)(x + 1) \geq 0$$

$$\iff (x - 1 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0) \vee (x - 1 \leq 0 \wedge x + 1 \leq 0) \iff x \geq 1 \vee x \leq -1$$

$x^2 - x + 1 \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da $x^2 - x + 1 = 0$ keine reellen Lösungen besitzt und $x^2 - x + 1$ eine nach oben geöffnete Parabel ist

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \iff x^2 - 1 = x^2 - x + 1 \iff x = 2 \Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$$

$$\text{b) } \mathbb{D} = [-1, 1] \text{ Begründung vgl. a)}$$

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{x^2 - x + 1} \iff 1 - x^2 = x^2 - x + 1 \iff 2x^2 - x = 0 \iff x(2x - 1) = 0$$

$$\iff x = 0 \vee x = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \{0, \frac{1}{2}\}$$

$$\text{c) } \mathbb{D} = \mathbb{R}, \text{ da } x^2 - 2x + 2 \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + 2x + 2 \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \iff x^2 - 2x + 2 = x^2 + 2x + 2 \iff x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$$

$$\text{d) } \mathbb{D} = [-\frac{10}{3}, \infty)$$

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$x = \sqrt{3x + 10} \Rightarrow x^2 = 3x + 10 \iff x^2 - 3x - 10 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10}$$

$$\iff x = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \iff x = 5 \vee x = -2$$

Probe zeigt: Nur $x = 5$ ist Lösung! $\Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$

$$\begin{aligned} \text{e) } \mathbb{D} &= [-2, \infty), \text{ da } \sqrt{x} + \sqrt{x+6} = 0 \iff x + \sqrt{x+6} = 0 \iff \sqrt{x+6} = -x \\ &\Rightarrow x^2 = x + 6 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Probe zeigt: Nur $x = -2$ ist Lösung!

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{x+6} &= 6 \iff x + \sqrt{x+6} = 36 \iff \sqrt{x+6} = 36 - x \Rightarrow x + 6 = (36 - x)^2 \\ x^2 - 73x + 1290 &= 0 \iff x = \frac{73}{2} \pm \frac{13}{2} \iff x = 43 \vee x = 30 \end{aligned}$$

Probe zeigt: Nur $x = 30$ ist Lösung! $\Rightarrow \mathbb{L} = \{30\}$

$$\text{f) } \mathbb{D} = [1, \infty)$$

Lösen der Gleichung im Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sqrt{x}} &= \sqrt{x-1} \iff 1 + \sqrt{x} = x - 1 \iff \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x-2)^2 \\ &\iff x = x^2 - 4x + 4 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ &\iff x = 4 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Probe zeigt: Nur $x = 4$ ist Lösung! $\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-2}{2x+2} &= \frac{x^2-x-1}{x+1} - \frac{x}{x+1} & \text{b) } \frac{x^2}{x+1} + \frac{x-3}{x^2-1} &= \frac{x^2}{x-1} \\ \text{c) } 2 - \frac{10x-13}{x-2} &= \frac{x^2+x+1}{2-x} \end{aligned}$$

Lösung:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x+2} &= \frac{x^2-x-1}{x+1} - \frac{x}{x+1} \iff \frac{x-2}{2(x+1)} = \frac{2x^2-2x-2-2x}{2(x+1)} \\ &\iff \frac{2x^2-5x}{2(x+1)} = 0 \iff \frac{x(2x-5)}{2(x+1)} = 0 \iff x = 0 \vee x = \frac{5}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{0, \frac{5}{2}\right\} \end{aligned}$$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} + \frac{x-3}{x^2-1} &= \frac{x^2}{x-1} \iff \frac{x^2(x-1) + x-3 - x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\iff \frac{-2x^2+x-3}{(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{L} = \{\}, \text{ da } -2x^2+x-3 = 0 \iff x^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Lösen der Gleichung:

$$2 - \frac{10x-13}{x-2} = \frac{x^2+x+1}{2-x} \iff \frac{2x-4-10x+13+x^2+x+1}{x-2} = 0 \iff \frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

$$\iff \frac{(x-5)(x-2)}{x-2} = 0 \iff x = 5 \Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$$

Aufgabe 5.

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Logarithmusgleichungen an und lösen sie diese.

$$\begin{array}{llll} a) \lg x = 3 & b) \lg x = \frac{1}{3} & c) \log_2 x = \frac{3}{2} & d) 3 \lg x = 1 \\ e) \lg(3x) = \frac{1}{2} & f) \lg x = \lg 3 - \lg 2 & g) \lg x + \lg(4x) = 2 & h) \lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2 \end{array}$$

Lösung:

Es ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$. Lösen der Gleichungen im Definitionsbereich:

$$a) \lg x = 3 \iff x = 10^3 = 1000 \Rightarrow \mathbb{L} = \{1000\}$$

$$b) \lg x = \frac{1}{3} \iff x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\sqrt[3]{10}\}$$

$$c) \log_2 x = \frac{3}{2} \iff x = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \{2\sqrt{2}\}$$

$$d) 3 \lg x = 1 \iff x = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\sqrt[3]{10}\}$$

$$e) \lg(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = 10^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{3}\sqrt{10} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3}\sqrt{10}\right\}$$

$$f) \lg x = \lg 3 - \lg 2 \iff \lg x = \lg \frac{3}{2} \iff x = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$g) \lg x + \lg(4x) = 2 \iff \lg((2x)^2) = 2 \iff 2 \lg(2x) = 2 \iff 2x = 10 \iff x = 5 \Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$$

$$h) \lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2 \iff \lg(\sqrt{x}) = 2 \lg 2 \iff \lg x = \lg(2^4) \iff x = 16 \Rightarrow \mathbb{L} = \{16\}$$

Aufgabe 6.

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

$$\begin{array}{lll} a) 4^x = 64 & b) 5^x = 10 & c) 3^{x-1} = 7 \\ d) 2^{x-2} - 2^{x+1} = 14 & e) 9 \cdot 2^{x+3} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 9(3^x - 2^x) & \end{array}$$

Lösung:

$$a) 4^x = 64 \iff 4^x = 4^3 \iff x = 3 \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$$

$$b) 5^x = 10 \iff x = \log_5 10 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\log_5 10\}$$

$$c) 3^{x-1} = 7 \iff 3^x = 21 \iff x = \log_3 21 = 1 + \log_3 7 \Rightarrow \mathbb{L} = \{1 + \log_3 7\}$$

$$d) 2^{x-2} - 2^{x+1} = 14 \iff 2^x \cdot 2^{-2} - 2^x \cdot 2 = 14 \iff 2^x \left(\frac{1}{4} - 2\right) = 14 \iff 2^x = -8, \text{ nicht lösbar, da } 2^x > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } 9 \cdot 2^{x+3} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+1} &= 9(3^x - 2^x) \iff 9 \cdot 2^x \cdot 2^3 - 4 \cdot 3^x - 3^x \cdot 3 = 9 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x \\
 &\iff 72 \cdot 2^x + 9 \cdot 2^x = 9 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3 \iff 81 \cdot 2^x = 16 \cdot 3^x \iff \frac{2^x}{3^x} = \frac{16}{81} \\
 &\iff \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \iff x = 4 \Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Achten Sie genau auf die nötigen Fallunterscheidungen.

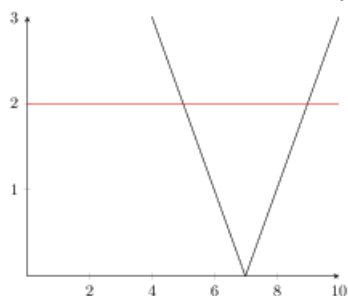
$$\text{a) } |x - 7| = 2 \quad \text{b) } |3x + 6| = x \quad \text{c) } |3x - 5| = 2|x + 2| \quad \text{d) } |x - 4| + |2 - x| = 2$$

Lösung:

$$\text{a) 1. Fall: } x - 7 \geq 0. \text{ Dann: } |x - 7| = 2 \iff x - 7 = 2 \iff x = 9 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{9\}$$

$$\text{2. Fall: } x - 7 < 0. \text{ Dann: } |x - 7| = 2 \iff -(x - 7) = 2 \iff x = 5 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{5\}$$

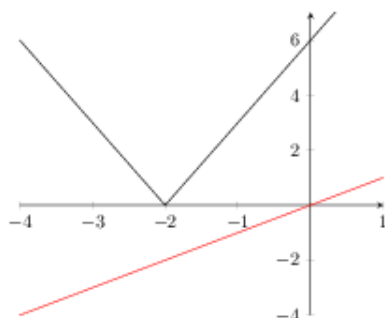
$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{5, 9\}$$



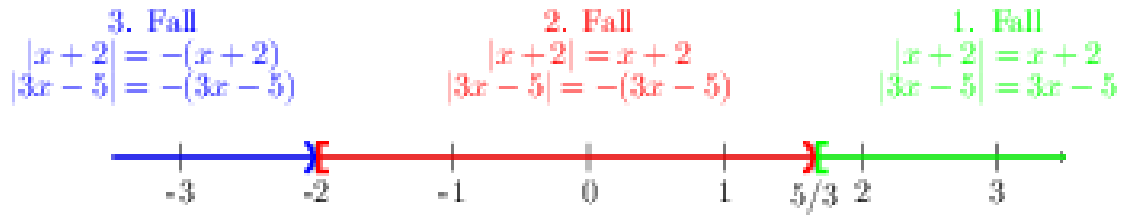
$$\text{b) 1. Fall: } 3x + 6 \geq 0 \iff x \geq -2. \text{ Dann: } |3x + 6| = x \iff 3x + 6 = x \iff x = -3 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{ \}, \text{ da } -3 < -2$$

$$\text{2. Fall: } 3x + 6 < 0 \iff x < -2. \text{ Dann: } |3x + 6| = x \iff -(3x + 6) = x \iff x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{ \}, \text{ da } -\frac{3}{2} > -2$$

$$\text{Insgesamt: } \mathbb{L} = \{ \}$$



$$\text{c) Vorüberlegung: } 3x - 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{5}{3}; \text{ und } x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

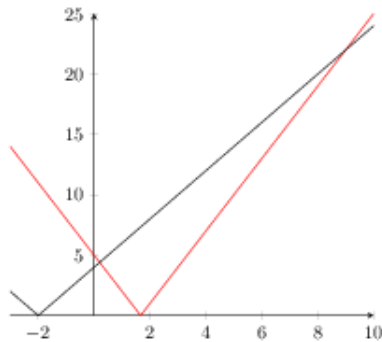


1. Fall: $x \geq \frac{5}{3}$. Dann $|3x-5| = 2|x+2| \iff 3x-5 = 2x+4 \iff x = 9 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{9\}$

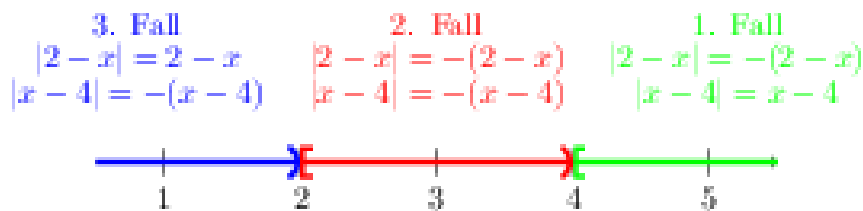
2. Fall: $-2 \leq x < \frac{5}{3}$. Dann $|3x-5| = 2|x+2| \iff -3x+5 = 2x+4$
 $\iff x = \frac{1}{5} \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

3. Fall: $x < -2$. Dann $|3x-5| = 2|x+2| \iff -3x+5 = -2x-4 \iff x = 9 > -2$
 $\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{ \}$

Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{\frac{1}{5}, 9\right\}$



d) Vorüberlegung: $x-4 \geq 0 \iff x \geq 4$; und $2-x \geq 0 \iff x \leq 2$

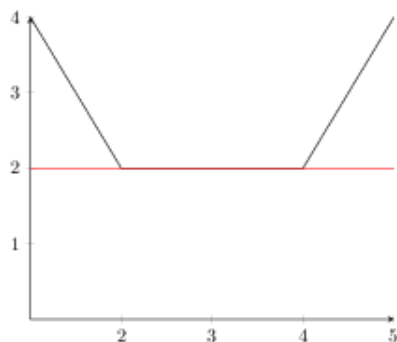


1. Fall: $x \geq 4$. Dann $|x-4| + |2-x| = 2 \iff x-4-2+x = 2 \iff x = 4 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{4\}$

2. Fall: $2 \leq x < 4$. Dann $|x-4| + |2-x| = 2 \iff -x+4-2+x = 2 \iff 2 = 2$
 $\Rightarrow \mathbb{L}_2 = [2, 4)$

3. Fall: $x < 2$. Dann $|x-4| + |2-x| = 2 \iff -x+4+2-x = 2$
 $\iff x = 2 \notin (-\infty, 2) \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{ \}$

Insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = [2, 4]$



Aufgabe 8.

Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils den Definitionsbereich an, und bestimmen Sie die Lösungsmengen mit Hilfe geeigneter Substitutionen.

a) $a^4 - 13a^2 + 36 = 0$ b) $w^4 - 5w^2 + 4 = 0$ c) $y^3 - y^6 = 1$

d) $x^{-2} - 2x^{-1} = 15$ e) $2^{x+1} - 4^x - 1 = 0$ f) $(\ln x)^2 - \ln(x^4) - 21 = 0$

Lösung:

a) $a^4 - 13a^2 + 36 = 0$, substituiere $s = a^2 \Rightarrow s^2 - 13s + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow s = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{13^2}{2^2} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} \Leftrightarrow s = 9 \vee s = 4$$

Rücksubstitution: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \vee a = -3$, $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \vee a = -2$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3, -2, 2, 3\}$

b) $w^4 - 5w^2 + 4 = 0$, substituiere $s = w^2 \Rightarrow s^2 - 5s + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow s = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \Leftrightarrow s = 4 \vee s = 1$$

Rücksubstitution: $w^2 = 4 \Rightarrow w = 2 \vee w = -2$, $w^2 = 1 \Rightarrow w = 1 \vee w = -1$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2, -1, 1, 2\}$

c) $y^3 - y^6 = 1$, substituiere $s = y^3 \Rightarrow s - s^2 = 1 \Leftrightarrow s^2 - s + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$, weil die Diskriminante negativ ist

d) $x^{-2} - 2x^{-1} = 15$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, substituiere $s = x^{-1} \Rightarrow s^2 - 2s - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow s = 1 \pm \sqrt{1 + 15} \Leftrightarrow s = 5 \vee s = -3$$

Rücksubstitution: $x^{-1} = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$, $x^{-1} = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$

e) $2^{x+1} - 4^x - 1 = 0$, substituiere $s = 2^x \Rightarrow 2 \cdot 2^x - (2^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2s - s^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow s^2 - 2s + 1 = 0 \Leftrightarrow s = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$$

Rücksubstitution: $2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{0\}$

f) $\ln(3s^6 - 1) - \ln(s^6) = 0$, $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left[-\sqrt[6]{\frac{1}{3}}, \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\right]$, wegen $3s^6 - 1 > 0 \wedge s^6 > 0$,

substituiere $t = s^6 \Rightarrow \ln(3t - 1) - \ln t = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3t - 1}{t}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3t-1}{t} = 1 \Leftrightarrow 3t-1 = t \Leftrightarrow 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rücksubstitution: } s^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow s = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \vee s = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right\}$$

Aufgabe 9.

a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0?$$

Lösung:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - (-3) \cdot (-2) = 22, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) - 6 \cdot (-5) = 22$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Aufgabe 10.

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -5 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + \frac{y}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \end{array}$$

Lösung:

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad D_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{3}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\} \text{ (Genau ein Schnittpunkt.)}$$

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -18 \quad \text{nicht lösbar}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ \} \text{ (Geraden parallel und verschieden)}$$

$$\text{c) } D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Unendlich viele Lösungen $\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2x - y = 7\}$ (Geraden sind gleich.)

Bemerkung: Zusätzlich Gleichungen jeweils auf die Form $y = mx + b$ bringen; Skizzen der zugehörigen Geraden; Vergleich Steigungen; Achsenabschnitte