Bergische Universität Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
AG Optimierung und Approximation

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgaben und Lösungen zum Vorkurs 2019

Prof. Dr. Kathrin Klamroth
Dr. Jonas Kremer
Dr. Britta Schulze
Dr. Michael Stiglmayr
Julius Bauss, M.Sc.
Anna Clevenhaus, M.Sc.
Onur Doganay, M.Sc.

1 Grundlagen

Aufgabe 1.
Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

$$a)\ \frac{1}{10} \qquad b)\ \frac{1}{100} \qquad c)\ \frac{3}{5} \qquad d)\ \frac{7}{4} \qquad e)\ \frac{1}{3} \qquad f)\ \frac{1}{11}$$

Lösung:

a) $\frac{1}{10} = 0.1$, da
$$\begin{array}{l} 1 : \quad 10 = 0.1 \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

b) $\frac{1}{100} = 0.01$, da
$$\begin{array}{l} 1 : \quad 100 = 0.01 \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{0} \\ 100 \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$$

c) $\frac{3}{5} = 0.6$, da
$$\begin{array}{l} 3 : \quad 5 = 0.6 \\ \underline{0} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

d) $\frac{7}{4} = 1.75$, da
$$\begin{array}{l} 7 : \quad 4 = 1.75 \\ \underline{4} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

e) $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, da
$$\begin{array}{l} 1 : \quad 3 = 0.\overline{3} \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \vdots \end{array}$$

f) $\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$, da $\begin{array}{l} 1 : \quad 11 = 0.\overline{09} \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{0} \\ 100 \\ \underline{99} \\ \quad 10 \\ \vdots \end{array}$

Aufgabe 2.
Wandeln Sie die Dezimalzahlen in Brüche um.

a) 0.75 *b)* 0.35 *c)* 1.24

Lösung:

a) $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ b) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ c) $1.24 = \frac{124}{100} = \frac{31}{25}$

Aufgabe 3.
Wie lauten die Binomischen Formeln? Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $(x + 2y)^2$ *b)* $(\frac{1}{x} - x)^2$ *c)* $(2z - 5w)(2z + 5w)$

Lösung:
a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

b) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$, $(\frac{1}{x} - x)^2 = \frac{1}{x^2} - 2 + x^2$, $(2z - 5w)(2z + 5w) = 4z^2 - 25w^2$

Aufgabe 4.
Berechnen Sie (geschickt!) ohne Taschenrechner.

a) $201^2 - 199^2$ *b)* $\frac{1000^2}{252^2 - 248^2}$

Lösung:
a) $201^2 - 199^2 = (201 - 199)(201 + 199) = 2 \cdot 400 = 800$

b) $\frac{1000^2}{252^2 - 248^2} = \frac{1000^2}{(252 - 248)(252 + 248)} = \frac{1000 \cdot 1000}{4 \cdot 500} = 500$

Aufgabe 5.
Berechnen und vereinfachen Sie möglichst geschickt die folgenden Ausdrücke.

a) $(2t - 1)(t^2 - 2t + 1)$

b) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2 - 2(a + 1)(a - 1)$

c) $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$

Lösung:
a) $$\begin{aligned}(2t - 1)(t^2 - 2t + 1) &= (2t - 1) \cdot [t^2 - (2t - 1)] \\ &= 2t^3 - t^2 - 4t^2 + 4t - 1 = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1\end{aligned}$$

b) $(a+1)^2 + (a-1)^2 - 2(a+1)(a-1) = [(a+1)-(a-1)]^2 = 2^2 = 4$

c) $(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = [(x+y+z)-(x-y-z)][(x+y+z)+(x-y-z)]$
$= [2y+2z][2x] = 4xy + 4xz$

Aufgabe 6.
Fassen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen.

a) $x^2 + 14xy + 49y^2$ *b)* $4a^2 - 9b^2$ *c)* $4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4$ *d)* $2x^4 - 18y^2$

Lösung:
a) $x^2 + 14xy + 49y^2 = (x+7y)^2$ b) $4a^2 - 9b^2 = (2a-3b)(2a+3b)$

c) $4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4 = (2a^2 - 5b^2)^2$ d) $2x^4 - 18y^2 = 2(x^4 - 9y^2) = 2(x^2 - 3y)(x^2 + 3y)$

Aufgabe 7.
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie an, welche Werte die Variablen nicht annehmen dürfen.

a) $a^2b^3a^{-1}b^5$ *b)* $\dfrac{t^p t^{q-1}}{t^r t^{s-1}}$ *c)* $\dfrac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}$

d) $\dfrac{(k^2)^3 \cdot k^4}{(k^3)^2}$ *e)* $\dfrac{(x+1)^2(x+1)^{-2}}{(x+1)^4(x+1)^{-3}}$

Lösung:
a) $a = 0$ nicht erlaubt, $a^{2-1}b^{3+5} = ab^8$

b) $t = 0$ nicht erlaubt, $\dfrac{t^p t^{q-1}}{t^r t^{s-1}} = t^p t^{q-1} t^{-r} t^{1-s} = t^{p+q-1-r+1-s} = t^{p+q-r-s}$

c) keine Variablen, $10^{2-4+3-0+2-5} = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

d) $k = 0$ nicht erlaubt, $\dfrac{k^6 k^4}{k^6} = k^4$

e) $x = -1$ nicht erlaubt, $\dfrac{(x+1)^{2-2}}{(x+1)^{4-3}} = \dfrac{1}{x+1}$

Aufgabe 8.

a) 12000 *Euro werden mit* 4 *% Zinsen pro Jahr auf einem Konto angelegt, wobei die am Jahresende fälligen Zinsen jeweils dem Guthaben zugeschlagen werden. Wie hoch ist das Guthaben nach* 15 *Jahren?*

b) Wie viel Geld hätten Sie vor 5 *Jahren bei einer Bank mit* 6% *pro Jahr anlegen müssen, um heute einen Betrag von* 50.000 *Euro zu erhalten?*

Lösung:
Zinseszinsformel: $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$, also

a) $K_{15} = 12000 \cdot 1.04^{15} \approx 21611.32$ b) $50000 = K_0 \cdot 1.06^5 \iff K_0 = 50000 \cdot 1.06^{-5} \approx 37362.91$

Aufgabe 9.

Der Umsatz eines Unternehmens wächst über einen Zeitraum von 3 Jahren jedes Jahr (im Vergleich zum Vorjahr) um 25 %. Wie groß ist das gesamte prozentuale Wachstum von p % über die gesamte Dreijahresperiode?

Lösung:

$$U_3 = U_0(1 + \frac{25}{100})^3 = U_0(1 + \frac{p}{100})$$

Somit: $1,25^3 = 1 + \frac{p}{100} \iff p = 95,3125$

Das gesamte prozentuale Wachstum beträgt also circa $95,3\%$.

Aufgabe 10.

a) *Der Gewinn eines Unternehmens stieg von 2000 auf 2001 um 20 % und nahm dann von 2001 auf 2002 um 17 % ab. In welchem der Jahre 2000 und 2002 war der Gewinn höher?*

b) *Bei welcher prozentualen Zunahme von 2000 auf 2001 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?*

c) *Bei welcher prozentualen Abnahme von 2001 auf 2002 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?*

Lösung:

a) Ist G der Gewinn im Jahr 2000, so ist der Gewinn im Jahr 2002:

$$G(1 + \frac{20}{100})(1 - \frac{17}{100}) = 0.996 \cdot G.$$

Also war der Gewinn im Jahr 2000 höher.

b) Zu lösen ist:

$$G = G(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{17}{100}) \iff 1 = (1 + \frac{p}{100}) \cdot 0.83 \iff p = \frac{1700}{83}.$$

Die Zunahme hätte bei circa 20.48% liegen müssen.

c) Zu lösen ist:

$$G = G(1 + \frac{20}{100})(1 - \frac{p}{100}) \iff 1 = 1.2 \cdot (1 - \frac{p}{100}) \iff p = \frac{100}{6}.$$

Die Abnahme hätte also bei circa 16.67% liegen müssen.

Aufgabe 11.

Für welche Werte von $a, x, y \in \mathbb{R}$ existiert die jeweils angegebene Wurzel?

a) $\sqrt{4+a}$ *b)* $\sqrt{-3-3y}$ *c)* $\sqrt{x^2-1}$ *d)* $\sqrt{-x^2-1}$ *e)* $\sqrt{1-a^2}$

Lösung:

a) $a \in [-4, \infty)$

b) $y \in (-\infty, -1]$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, d.h für $|x| \geq 1$

d) ex. für kein $x \in \mathbb{R}$, da $x^2 \geq 0$, also $-x^2 - 1 \leq -1$

e) $a \in [-1, 1]$, d.h für $|a| \leq 1$

Aufgabe 12.
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. a, b, x und y seien dabei so gewählt, dass alle auftretenden Terme definiert sind.

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}$ *c)* $(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{b}+\sqrt{5})^2$

d) $\sqrt{9a^2-6a+1}$ *e)* $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$ *f)* $\sqrt{a^2-10a+25}$

Lösung:

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}=\dfrac{x-4y}{5(x-4y)}=\dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x}}=\sqrt{1+x}$

c) $(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{b}+\sqrt{5})^2=b-2\sqrt{5b}+5+b+2\sqrt{5b}+5=2(b+5)$

d) $\sqrt{9a^2-6a+1}=\sqrt{(3a-1)^2}=|3a-1|$
Hinweis: Erst $\sqrt{x^2}=|x|$ erklären; Zahlenbeispiele

e) $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}=4\sqrt{\dfrac{1+2x}{(1-2x)(1+2x)}}=\dfrac{4}{\sqrt{1-2x}}$

f) $\sqrt{a^2-10a+25}=\sqrt{(a-5)^2}=|a-5|$

Aufgabe 13.
Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_5 25$ *b)* $\lg 0.001$ *c)* $\log_{17} 1$ *d)* $\log_2(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2^3})$ *e)* $\log_8\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$

Lösung:
a) $\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$

b) $\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3\lg 10=-3$

c) $\log_{17} 1=0$ (allgemein immer $\log_b 1=0$)

d) $\log_2(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2^3})=\log_2(2^{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}})=\log_2(2^{\frac{14}{15}})=\dfrac{14}{15}\log_2 2=\dfrac{14}{15}$

e) $\log_8\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)=\log_8(8^{-\frac{1}{2}})=-\dfrac{1}{2}\log_8 8=-\dfrac{1}{2}$

Aufgabe 14.
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Summen bzw. Differenzen und Produkte bzw. Quo-

tienten.

a) $\log_3 (3x)$ *b)* $\log_5 \left(\frac{5a}{y}\right)$ *c)* $\lg \left(\frac{\sqrt{a}\cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right)$

d) $\lg \left[\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right]$ *e)* $\lg \left(\frac{5\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)$

Lösung:
Bem: Diskutieren, für welche Werte die jeweiligen Ausdrücke definiert sind.

a) $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$, f"ur $x \geq 0$

b) $$\log_5 \left(\frac{5a}{y}\right) = \begin{cases} \log_5 5 + \log_5 a - \log_5 y = 1 + \log_5 a - \log_5 y, & a, y > 0 \\ \log_5 5 + \log_5 (-a) - \log_5 (-y) = 1 + \log_5 (-a) - \log_5 (-y), & a, y < 0 \end{cases}$$
$$= 1 + \log_5 |a| - \log_5 |y|,\ a, y > 0 \vee a, y < 0$$

c) $\lg \left(\frac{\sqrt{a}\cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right) = \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg b^2 - \lg c^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\lg a + 2\lg |b| - \frac{1}{4}\lg c,\ \ a, c > 0, b \neq 0$

d) $\lg \left[\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right] = 10\lg \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right) = 10\lg(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}) - \lg c,\ \ a, b, c > 0$

e) $\lg \left(\frac{5\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\right) = \lg \left(\frac{5|x|y^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}\right) = \lg 5 + \lg |x| + \frac{1}{2}(\lg y - \lg a) - \frac{1}{4}\lg b,$
$a, b, y > 0, x \neq 0$

Aufgabe 15.
Schreiben Sie die folgenden Terme mit nur einem Logarithmus auf.

a) $2\log_5 u + 3\log_5 v$ *b)* $\lg (a+b) + \lg (a+b)^2 - \frac{1}{2}\lg a - \frac{1}{3}\lg b$

c) $\frac{1}{3}\log_2 x + \frac{2}{3}$ *d)* $\log_4 (x^2-1) - \log_4 (x-1) - \log_4 (x+1)^2$

e) $\left[(\log_4 x^2) : (\log_4 x)\right] - 2$ *f)* $\left[\left(\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b}\right) : \left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b}\right)\right] \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{6}}$

g) $2\lg a - \lg \frac{a}{a^2+1} - \lg a^3$

Lösung:

a) $2\log_5 u + 3\log_5 v = \log_5 u^2 + \log_5 v^3 = \log_5 (u^2 v^3)$

b) $\lg (a+b) + \lg (a+b)^2 - \frac{1}{2}\lg a - \frac{1}{3}\lg b = \lg \left(\frac{(a+b)^3}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}\right)$

c) $\frac{1}{3}\log_2 x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(\log_2 x + \log_2 2^2) = \frac{1}{3}\log_2 (4x) = \log_2 \sqrt[3]{4x}$

d) $\log_4(x^2-1)-\log_4(x-1)-\log_4(x+1)^2=\log_4\left(\frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)^2}\right)=\log_4\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}\right)$

$=\log_4\frac{1}{x+1}=-\log_4(x+1)$

e) $\left[(\log_4 x^2):(\log_4 x)\right]-2=\frac{2\log_4 x}{\log_4 x}-2=0$

f) $\left[\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right):\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right)\right]\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}}{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}}\left(-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}6\right)=-\log_{\frac{1}{2}}6$

g) $2\lg a-\lg\frac{a}{a^2+1}-\lg a^3=\lg(a^2)+\lg\frac{a^2+1}{a}-\lg a^3=\lg\left(a^2\frac{a^2+1}{a}\frac{1}{a^3}\right)=\lg\frac{a^2+1}{a^2}$

Aufgabe 16.
Formen Sie die folgenden Terme so um, dass sie mit Logarithmen zur Basis 10 *oder* e *berechnet werden können.*

a) $\log_4 130-\log_3 20$ *b)* $\log_{\frac{1}{3}}234+\lg 93-\log_2 92$

Lösung:
Anmerkung: Moderne Taschenrechner können auch mit beliebigen Basen umgehen.

a) $\log_4 130-\log_3 20=\frac{\lg 130}{\lg 4}-\frac{\lg 20}{\lg 3}\left(=\frac{\lg 13+1}{\lg 4}-\frac{\lg 2+1}{\lg 3}\right)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}234+\lg 93-\log_2 92=\frac{\lg 234}{\lg\frac{1}{3}}+\lg 93-\frac{\lg 92}{\lg 2}=-\frac{\lg 234}{\lg 3}+\lg 93-\frac{\lg 92}{\lg 2}$

Aufgabe 17.
Schreiben Sie die folgenden Terme als Summe.

a) $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^3b}{c^2d}}\right)$ *mit* $a,b,c,d>0$ *b)* $\ln\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)$ *mit* $x>0$

Lösung:

a) $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^3b}{c^2d}}\right)=\ln\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{4}}}=\frac{3}{4}\ln a+\frac{1}{4}\ln b-\frac{1}{2}\ln c-\frac{1}{4}\ln d$

b) $\ln\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)=\ln\left((x(xx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right)=\ln(x^{\frac{7}{8}})=\frac{7}{8}\ln x$